



行列式の基本性質について

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 浜松医科大学 公開日: 2013-08-27 キーワード (Ja): 行列式の基本性質 キーワード (En): 作成者: 伊藤, 善彦 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10271/174

行列式の基本性質について

伊 藤 善 彦

(数 学)

A Remark on the Essential Properties of Determinants

Yoshihiko ITO

Mathematics

Abstract. Let K be a commutative ring. For each $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$ over K , we define the determinant $d(A)$ by the formula

$$d(A) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a(\sigma),$$

where the sum is taken over the set S_n of all permutations σ of $\{1, 2, \dots, n\}$, $\varepsilon(\sigma)$ is the sign of the permutation, and

$$a(\sigma) = a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Assume $n \geq 2$, and let τ be a transposition in S_n . The mapping $r_\tau : S_n \rightarrow S_n$ by the formula $r_\tau(\sigma) = \sigma\tau$ for each $\sigma \in S_n$ is a bijection. Then it is clear that the following theorem holds :

Theorem. $d(A) = \sum_{\sigma} (a(\sigma) - a(\sigma\tau))$,

where the sum is taken over the set A_n of all even permutations σ .

In this paper, we will show that next two essential theorems B_2 and C_1 can be derived from our theorem.

Theorem B_2 . Interchanging two rows of A multiplies $d(A)$ by -1 .

Theorem C_1 . If A has two rows alike, then $d(A) = 0$.

キーワード： 行列式の基本性質

近年、計算機の普及により、数式の計算においてともすると、その途中経過が軽視されがちである。まして、出来合いのソフト等を使用するときにはなおさらのことである。そこで、一般教養としての数学を教育する場においては、とくにそのような弊害を除去することに心がけね

ばならない。この小論においては、そのことを行列式の基本性質の証明に例をとって述べてみたい。

1. K を任意の可換環とする。 K 上の n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の行列式 $d(A)$ は、多くの場合、その歴史的動機にしたがって

$$d(A)=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)a(\sigma) \quad (*)$$

で定義する。ここに、 σ は n 文字の置換であり、 $\varepsilon(\sigma)$ は σ の符号で、 σ が偶置換ならば $+1$ 、奇置換ならば -1 とする。また、

$$a(\sigma)=a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}=\prod_{i=1}^na_{i\sigma(i)}$$

さらに、 $\sum$ は $n!$ 個の置換 σ のすべてについてとった総和である。

定義式(*)から通常、行列式の6つの基本性質が導かれるが、ここではその中次の2つの性質に注目する。

定理 B₂⁽¹⁾ 行列式の任意の2つの行を入れかえたものは、もとの行列式の符号を変えたものに等しい。

定理 C₁ 行列式の任意の2つの行が相等しければ、この行列式は0に等しい。

定理 C₁ は定理 B₂ の直接の結果として導かれる場合が多い。すなわち、2つの行が相等しい行列を A とし、その相等しい2つの行を入れかえたものを A' とする。定理 B₂ より、 $d(A')=-d(A)$ であるが、 $A'=A$ であるから、 $d(A)=-d(A)$ 。したがって、 $d(A)=0$ となる。しかし、この証明には2つの難点がある。1つは、行列式を数体から一般の体（とくに、標数が2の体）にまで拡張したときには、上の証明では正しくない。次に、上の証明は行列式の定義式(*)の内容にあまりにも無頓着のように感ぜられる。定理 C₁ は、上の証明のように、ある種の理論の結果として行列式の“値”が0になるのではない。実際、具体例について見れば分かるように、その値は2つずつの項が相殺し合って、0を $n!/2$ 個加えたものとして0となるのである。

例えば、 $n=3$ で、第1行と第3行が等しいとき、

$$\begin{aligned} d(A) &= (a_{11}a_{22}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{11})+(a_{12}a_{23}a_{11}-a_{11}a_{23}a_{12})+(a_{13}a_{21}a_{12}-a_{12}a_{21}a_{13}) \\ &= 0+0+0=0 \end{aligned}$$

さらに、行列式を交代多重線形写像(alternating multilinear mapping)として定義する⁽²⁾ときは、定理 B₂ よりむしろ定理 C₁ を優先してその定義に採用する場合もあり、そのときは、定理 B₂ は定理 C₁ から導かれる1つの結果となるのである。

2. 本小論では、大学初級学年において、行列式について講義する際、行列式の定義式(*)に準拠しつつ、これら定理 B₂ と定理 C₁ を対等に扱う方法について述べる。上の例からも分かる

ように、 $n \geq 2$ のとき、行列式における $n!$ 個の項を 2 つずつ組合わせて考えることにする。 $n \geq 2$ とし、 n 次の対称群を S_n で表す。 τ を S_n の 1 つの互換として、 S_n の各元 σ を S_n の元 $\sigma\tau$ に写す写像は S_n 上の 1 対 1 対応であるから、次の定理が成り立つのは明らかである。

定理 行列式の定義式(*)は、任意の互換 τ によって次のように表せる。

$$d(A) = \sum_{\sigma} (a(\sigma) - a(\sigma\tau))$$

ここに、 $\sum$ は $n!/2$ 個の偶置換 σ のすべてについてとった総和である。

この定理から、定理 B₂ と定理 C₁ は次のように得られる。

定理 B₂ の証明： 行列 A の第 λ 行と第 μ 行を入れかえて得られる行列を $B=(b_{ij})$ とする。 $b_{i\sigma(i)}$ は λ と μ の互換 τ によって、次のように表される。

$$b_{i\sigma(i)} = a_{i\sigma\tau(i)}$$

従って、定理より

$$\begin{aligned} d(B) &= \sum_{\sigma} (b(\sigma) - b(\sigma\tau)) \\ &= \sum_{\sigma} (a(\sigma\tau) - a((\sigma\tau)\tau)) \\ &= \sum_{\sigma} (a(\sigma\tau) - a(\sigma)) \\ &= -d(A) \end{aligned}$$

定理 C₁ の証明： 第 λ 行と第 μ 行が等しい行列を A とすると、 λ と μ の互換を τ とするとき、

$$i \neq \lambda, \mu \text{ のとき, } \sigma\tau(i) = \sigma(i)$$

$$i = \lambda \text{ のとき, } \sigma\tau(\lambda) = \sigma(\mu)$$

$$i = \mu \text{ のとき, } \sigma\tau(\mu) = \sigma(\lambda)$$

$$\therefore a(\sigma\tau) = a(\sigma)$$

従って、定理より

$$d(A) = \sum_{\sigma} 0 = 0$$

なお、Birkhoff-MacLane⁽³⁾ および伊藤⁽⁴⁾ でも、定理 C₁ をこれと類似の方法で証明している。

注

1. 定理 B_2 , 定理 C_1 は藤原松三郎⁽¹⁾の第 7 章 § 7.7 にならって付した。

文 献

1. 藤原松三郎, 代数学, 第一巻, 内田老鶴圃, 昭和 2 年.
2. Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965. Ch. XIII, § 4.
3. Garret Birkhoff and Saunders MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, 3rd ed. Macmillan, 1965. Ch. X, § 1.
4. 伊藤善彦, 現代数学の基礎, 杉山書店, 昭和 57 年. 第 II 章 § 4.4.

昭和 62 年 2 月 28 日受理