



Taylorの定理の証明についての一考察

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 浜松医科大学 公開日: 2013-08-27 キーワード (Ja): キーワード (En): Taylor's theorem, Roche-Schlömilch's form of the remainder, Cauchy's form of the remainder, Lagrange's form of the remainder 作成者: 伊藤, 善彦 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10271/180

Taylor の定理の証明についての一考察

伊 藤 善 彦

(数 学)

A Note on the Taylor's Theorem

Yoshihiko ITO

Mathematics

Abstract. We suppose that a and b are confined to an interval over which a function f has all of the continuous derivatives we want to use. Then we have a Taylor formula with remainder R_n :

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (b-a)^i + R_n \\ &= S_n(a) + R_n \end{aligned}$$

In this note we shall give the remainder R_n in a direct way based on the Rolle's theorem.

Theorem (*Taylor's theorem*)

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1}(g(b)-g(a))}{(n-1)!g'(c)}$$

for some c between a and b , where g is a function that is continuous for $a \leq x \leq b$, differentiable for $a < x < b$ and $g'(x) > 0$ or $g'(x) < 0$ for $a < x < b$.

If we take $g(x) = (b-x)^m$ ($m \neq 0$), we have the following corollary.

Corollary (*The Roche-Schlömilch form of the remainder*)

$$R_n(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{m(n-1)!} (b-a)^m (b-c)^{n-m}$$

Key word : Taylor's theorem, Roche-Schlömilch's form of the remainder, Cauchy's form of the remainder, Lagrange's form of the remainder.

三角関数, 指数関数, 対数関数等の Maclaurin 展開は, 将来にわたって数学的技巧をあまり必要としない医学生等にとっても極めて有用である。例えば, 統計学の理論展開においては, これは避けては通れない方法である。ところが, Maclaurin 展開の基礎となる Taylor の定理の証明をみると, その剰余の項を, 一部のテキスト (例えば1), 2)) を除けば

$$R_n = (b-a)^n M$$

$$R_n = \frac{K}{n!} (b-a)^n$$

等と天下り的に定義して証明しており, 技巧的で, その必然性に乏しい感があっただけで証明の本質が把握しにくい難点がある。また, 1) では R_n を定積分で定義しているし, 2) は Cauchy の平均値の定理を経由して証明している。そこで, この小論においては, Taylor の定理の証明を Cauchy の平均値の定理等を経由することなく, 直接 Rolle の定理に帰着させることにのみ重点を置いて, 見直してみることにする。

1. $f(x)$ を任意の整関数とし

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

と表せば, 任意の a, b に対して

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a + (b-a)) \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n \end{aligned}$$

と表すことができる。

そこで, 或る区間において関数 $f(x)$ は有限確定な値をとり, その導関数 $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ もまたその区間で有限確定であると仮定して, 整関数の場合と同様の関係を考察するために, その区間内の a, b ($a < b$) をとって

$$R_n = f(b) - S_n(a), \quad (1)$$

$$S_n(a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} \quad (2)$$

とおく。

いま, 適当な関数 $h(x)$ をとって

$$F(x) = S_n(x) + R_n h(x) \quad (3)$$

とおくと, (1)より

$$F(a) = S_n(a) + R_n h(a) = f(b) + R_n(h(a) - 1)$$

また、(2)より

$$F(b) = S_n(b) + R_n h(b) = f(b) + R_n h(b)$$

よって、関数 $h(x)$ を適当な関数 $g(x)$ によって

$$h(x) = \frac{g(b) - g(x)}{g(b) - g(a)}$$

となるようにとれば

$$F(a) = F(b) = f(b)$$

となる。したがって、 $g(x)$ としてさらに閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能な関数で、この区間で $g'(x) > 0$ または $g'(x) < 0$ となるものをとれば、Rolle の定理より、 $a < c < b$ をみたす適当な c が存在して

$$F'(c) = 0$$

となる。よって、(3)より

$$R_n = -\frac{S_n'(c)}{h'(c)}$$

$$\therefore R_n = \frac{f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1}(g(b)-g(a))}{(n-1)!g'(c)} \quad (4)$$

よって、Taylor の定理は次のように表される。

定理 $f(x)$ がある区間において n 回微分可能であるとする。この区間内の任意の a, b ($a < b$) に対して、

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n \end{aligned}$$

とおけば、 R_n は閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能な関数 $g(x)$ で、この区間で $g'(x) > 0$ または $g'(x) < 0$ のものと、 a, b 間の適当な c によって、上の(4)のように表される。

2. 定理において、条件をみたす微分可能な関数 $g(x)$ として

$$g(x) = (b-x)^m$$

をとれば, Roche-Schlömilch の剰余

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{m(n-1)!} (b-a)^m (b-c)^{n-m}$$

がえられ, さらに, $m=1$ のとき, Cauchy の剰余

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} (b-a)(b-c)^{n-1}$$

が, また, $m=n$ のとき, Lagrange の剰余

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n$$

が得られる。

文 献

1. Agnew, R.P.: *Calculus*. New York: McGraw-Hill, 1962, p.632-635.
2. 藤原松三郎: 微分積分学, 第一巻. 東京: 内田老鶴圃新社, 1974. p.171-173.

(昭和63年1月30日受理)