



Darbouxの定理に関する一つの注意

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 浜松医科大学 公開日: 2013-08-27 キーワード (Ja): キーワード (En): Darboux Theorem, Riemann sum, Riemann integrable 作成者: 伊藤, 善彦 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10271/183

Darbouxの定理に関する一つの注意

伊 藤 善 彦

(数 学)

A Remark on the Darboux Theorem

Yoshihiko ITO

Mathematics

Abstract. Let f be a continuous function which is defined over an interval $[a, b]$. In this paper, we will show that f is Riemann integrable over $[a, b]$ without using the concept of the greatest lower bound of all upper Darboux sums or the least upper bound of all lower Darboux sums.^{1),2)}

Let P be a partition of the interval $[a, b]$:

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n(P)} = b.$$

The greatest of the numbers $d_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, 2, \cdots, n(P)$) is denoted by the symbol $|P|$. Let ξ_i be any number in the subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \cdots, n(P)$), we define the Riemann sum for the point $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n(P)})$ by

$$\Sigma(P, f) = \sum_{i=1}^{n(P)} f(\xi_i) d_i.$$

We will prove the next

Theorem (Darboux).²⁾ If f is a continuous function which is defined over an interval $[a, b]$, there is a number I such that to each positive number ϵ there corresponds a positive number δ such that

$$|\Sigma(P, f) - I| < \epsilon$$

whenever $|P| < \delta$.

Key words : Darboux Theorem, Riemann sum, Riemann integrable

近年、大学の一般教養における微分積分学の教科書では実数論を避けて、有界な単調数列が収束することを出発点としているものが多い。そして、定積分では連続関数のみを扱うためか、

定積分の概念を説明する際に、上限・下限を用いない傾向がある。そのため、理論的に不備が生じたり、高等学校で習う区分求積法との関連が損なわれたりする教科書が多く出版されている。ここでは、その不備な点を指摘し、それを補正したい。

1. 記号の導入

閉区間 $[a, b]$ 内に $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < b$ となるように有限個の点 x_i をとって、この区間を小閉区間 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \cdots$) に分割するとき、この分割を

$$P : x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n(P)} = b$$

と表す。この分割 P に対して、

$$d_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n(P))$$

$$|P| = \text{Max}\{d_i ; i = 1, 2, \cdots, n(P)\}$$

と定義する。とくに、

$$P_0 : x_0 = a < x_1 = b$$

も 1 つの分割とみなす： $n(P_0) = 1$, $|P_0| = d_1 = b - a$

f を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数とする。 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における最大値を M , 最小値を m , また各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における最大値を M_i , 最小値を m_i とする：

$$m \leq f(x) \leq M, \quad a \leq x \leq b,$$

$$m_i \leq f(x) \leq M_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n(P)).$$

また、この関数 f と区間 $[a, b]$ の分割 P に対して、2 つの和

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n(P)} M_i d_i, \quad s(P, f) = \sum_{i=1}^{n(P)} m_i d_i$$

を定義し、それぞれ f の P に関する過剰和および不足和という：

$$m(b-a) \leq s(P, f) \leq S(P, f) \leq M(b-a). \quad (1)$$

つぎに、閉区間 $[a, b]$ の 2 つの分割 P, P' に対して、 P の分点がすべて P' の分点になっているとき、 P' は P の細分であるという。そして分割にその分点の集合という概念をも含めて、これを記号 $P \subset P'$ で表す。このとき、つぎの不等式が成り立つ。

$$s(P, f) \leq s(P', f), \quad S(P, f) \geq S(P', f) \quad (2)$$

命題1 . $[a, b]$ の任意の2つの分割 P_1, P_2 に対して, つぎの不等式が成り立つ。

$$s(P_1, f) \leq S(P_2, f)$$

証明 $P_1, P_2 \subset P_1 \cup P_2$ であるから, (2)と(1)とより

$$s(P_1, f) \leq s(P_1 \cup P_2, f) \leq S(P_1 \cup P_2, f) \leq S(P_2, f).$$

命題2 . $[a, b]$ の分割の列

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots$$

を決めれば, その都度極限值

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n, f), \quad s(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(P_n, f)$$

が存在して, $S(f) \geq s(f)$ である。

証明 2つの数列 $\{S(P_n, f)\}, \{s(P_n, f)\}$ は(1)より共に有界で, (2)より共に単調であるから, 共に収束する。よって, $S(f)$ と $s(f)$ が存在し, (1)より $S(f) \geq s(f)$ である。

命題3 . 命題2の分割の列 $\{P_n\}$ を条件

$$|P_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \tag{3}$$

を満たすようにすれば, $S(f) = s(f)$ である。

証明 f は $[a, b]$ で一様連続であることから, 結果が正しいことはよく知られている。

(注意) $S(f), s(f)$ は共に初めの分割 P_1 および, 以後の細分 P_n の仕方に依存する。

2. 各教科書にみられる不備

定積分の定義をつぎのようにする:

定義 閉区間 $[a, b]$ で定義された関数 f と(1)で定義された $[a, b]$ の分割 P に対して, その各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ からそれぞれ任意の点 ξ_i をとり, Riemann の和

$$\Sigma(P, f) = \sum_{i=1}^{n(P)} f(\xi_i) \Delta x_i$$

をつくる:

$$s(P, f) \leq \Sigma(P, f) \leq S(P, f). \tag{4}$$

いまもし定数 I が確定し, 任意の正数 ϵ に対して, 正数 δ が対応して, $|P| < \delta$ なる分割 P をとれば, 任意の $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ に対して, 不等式

$$|\Sigma(P, f) - I| < \epsilon$$

が成立するとき、 f は区間 $[a, b]$ で積分可能であるという。そして、この定数 I を記号

$$\int_a^b f(x) dx$$

で表す。

この定義に対して、多くの教科書にみられる扱い方とその欠陥はつぎのように分類される。

1) f が区間 $[a, b]$ で連続であれば、 f は $[a, b]$ で積分可能であることを、証明無しで認めさせるもの。

大学の一般教養における数学において、計算技術よりもその理論構成の美しさに重きを置こうとする立場を取るときは、このような天下りの定義は好ましいとはいえない。

2) f が区間 $[a, b]$ で連続であれば

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} (S(P, f) - s(P, f)) = 0$$

であることのみしか証明しないもの。

これでは、定積分の存在証明にはなっていない。それは、(3)をみたす1つの分割の列 $\{P_n\}$ をとったとき得られる極限值 $S(f)$ と $s(f)$ がそれぞれ $\inf_p S(P, f) = \sup_p s(P, f)$ に等しいことを經由していないので、 $\lim_{|P| \rightarrow 0} S(P, f)$, $\lim_{|P| \rightarrow 0} s(P, f)$ が確定しないからである。

3) 命題3を証明して、この値を $\int_a^b f(x) dx$ の定義としてしまう教科書もある。

これでは、前述の不備に加えて記号の意味が明確にならない難点がある。

3') さらに、3) で定義した定積分の後で、区分求積法を例題として上げている教科書もいくつか見られる。

区間の n 等分と区間の細分とは別の概念であるから、この例題は不適當である。

4) f が区間 $[a, b]$ で連続な関数のとき、(3)を満たす区間 $[a, b]$ の任意の2つの細分の列に対して、対応する2つの過剰和の列と2つの不足和の列がそれぞれ等しい極限値に収束することを証明するもの。

この方法によれば理論的な不備はないが、しかし、この場合も区分求積法との関連は導けない。

以上のような欠陥は、上積分 $\inf_p S(P, f)$, 下積分 $\sup_p s(P, f)$ の概念を分析すること (Darboux の定理の追証) なしに直接移入している点から生じていると考えられる。

3. Darboux の定理の追証

前節で述べた欠陥を補正する意味で、ここで上限・下限の概念を用いなくて、連続関数に関

する定積分の可能性を証明する。

定理 (Darboux)²⁾ f を閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数とする。このとき、 $S(f)$, $s(f)$ を命題3で得られた任意の分割の列の極限值とすると、

(i) 任意の正数 ϵ に対して、正数 δ が対応して、 $[a, b]$ の分割 P を $|P| < \delta$ となるようにとれば、つぎの不等式が成立する。

$$|S(P, f) - S(f)| < \epsilon, |s(P, f) - s(f)| < \epsilon$$

(ii) f は $[a, b]$ で積分可能である。

証明 (i) 命題2の分割の列で条件(3)を満たすものを $\{P_n\}$ とすると、任意の n に対して

$$|S(P, f) - S(f)| \leq |S(P, f) - S(P \cup P_n, f)| + |S(P \cup P_n, f) - S(f)|$$

(2)と命題1とより、

$$|S(P, f) - S(P \cup P_n, f)| \leq |S(P, f) - s(P, f)|$$

また、(2)と命題2とより、

$$|S(P \cup P_n, f) - S(f)| \leq |S(P_n, f) - s(P_n, f)|$$

f の連続性と条件(3)とより、任意の正数 ϵ に対して、正数 δ と δ_1 とが対応して、

$$|P| < \delta \text{ ならば, } |S(P, f) - s(P, f)| < \epsilon/2$$

$$|P_n| < \delta_1 \text{ ならば, } |S(P_n, f) - s(P_n, f)| < \epsilon/2$$

よって、任意の正数 ϵ に対して、番号 n を十分大きくとっておけば、正数 δ が対応して、

$$|P| < \delta \text{ ならば, } |S(P, f) - S(f)| < \epsilon$$

他の不等式も同様に証明できる。

(ii) (i)の結果から、 $I = S(f) = s(f)$ とすると、(4)より

$$-\epsilon < s(P, f) - s(f) \leq \Sigma(P, f) - I \leq S(P, f) - S(f) < \epsilon$$

$$\therefore |\Sigma(P, f) - I| < \epsilon$$

(注意1) (i)より、 $S(f)$, $s(f)$ は条件(3)を満たすならば $[a, b]$ の細分の仕方によらず一定であることが分かる。さらに、このことから、(i)の不等式はつぎのように精密化できる。

$$0 \leq S(P, f) - S(f) < \epsilon, \quad 0 \leq s(f) - s(P, f) < \epsilon$$

$$\therefore S(f) = \inf_P S(P, f), \quad s(f) = \sup_P s(P, f)$$

(注意2) $[a, b]$ の n 等分を $P^{(n)}$ とすると $|P^{(n)}| = (b-a)/n$ であるから, $P^{(n)}$ はこの定理の条件を満たす。よって, 区分求積法との関連は

$$\xi_i = a + (b-a)i/n = x_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とすれば, つぎのように得られる。

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma(P^{(n)}, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a)/n \sum_{i=1}^n f(a + (b-a)i/n)$$

文 献

1. Agnew, R.P. : *Calculus*, p.344-349, McGraw-Hill, New York, 1962.
2. 日本数学会編集 : 岩波数学辞典, 第3版, p.520-521, 岩波書店, 東京, 1985.

(平成元年1月31日受理)