HamaMed-Repository
浜松医科大学学術機関リポジトリ
浜松医科大学
Hamamatsu University School of Medicine

カード・ゲームの数理ノート;「神経衰弱」における戦略について

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2013-08-27 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 野田, 明男 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10271/236

浜松医科大学紀要　一般教育　第15号（2001）

カード・ゲームの数理ノート；「神経衰弱」における戦略について

野田明男
（数　学）

A Mathematical Note of Card Games ; on Some Strategies in the Concentration Game

Akio Noda
Mathematics

Abstract: Simple card games for children seem to have complicated and interesting aspects in constructing the optimal strategies. In this paper, we take up the concentration game played by two persons who have both perfect memory, and study two different (pure) strategies arising from a random selection of unknown cards. In particular, the mean value of the score of a player who has the move is analyzed by solving some difference equations.

Key words: strategy, card game, expectation, difference equation, generating function.

§1.　序

確率・統計に関する授業を毎年複数の大学で（受講生は合わせて150名余）担当している。サイコロやトランプ・カードによるさまざまなチャンス・ゲームを例題に取りあげ、ゲームに勝つ確率や得点の期待値を計算するという経験を積み重ねて来た。学生とともにこの種の離散型確率の問題をいろいろと考え、解いて行くうちに、ゲームとしては単純な子供向けのカード・ゲーム（神経衰弱、ババ抜き、7並べなど）に伴う数理をきちんと考察しようとすれば、なかなか奥の深い面を見せる事実に行き着いた。そうしてこの夏、とても解けそうには見えなかったある種の定差方程式（漸化式(3-3)と(4-3)）を解くことに成功し（§3と§4の定理1と定理2をそれぞれ参照）、小論の形にまとめる価値を見出した次第である。

このノートは、「神経衰弱」という記憶力が試されるゲームを二人で行う場面を取り扱う。用いる（2M）枚のカードは、1から M までの数が2枚ずつ書かれており、同じ数が4枚ずつある通常のトランプ・カード（M=13）とは異なる点に留意する。対戦する二人は両者とも完全な記憶力を保持していると仮定する。このとき、ランダムな未知カードの選択とともに自然に生じるゲーム戦略2つを数学的に研究し、この2つを比較するのがわれわれの目的である。記憶容量に制限が加わる、より人間らしい仮定の下ではどうなるか、という課題は、医学から見ても興味深い点を含むが、ここで論じる段階にまだ達していない。

さて、神経衰弱においては、既知カード（裏向きのカードがめくられて、そのカードの数が何であるか、両者に記憶されてしまう）の枚数 a と未知カード（ずっと裏向きのままで、カードの数はわからない）の枚数 b とが、ゲームの進行（手番は交互に移る）とともに、変化して行く。もちろん、数の一致するカードが既知カードの中にあれば、手番の者は即座にそのペアをめくって一組取ることができる。また、1枚目にめくったカードの数が既知カードの中にあれば、そのカードを2枚目にめくって一組取ることができる。こうして、われわれは m 組のペアがまだ場に残っていて、a 枚の既知カードの中には数の一致するものが全くない場面を考えることになる（$2 \leqq m \leqq M, 0 \leqq a \leqq m$）。

1枚目は、未知カード b（$=2m-a$）枚の中からランダムに選んでめくる。1枚目のカードの数が、もし既知カードの中にあれば、それをめくって一組取り、$m-1$ と $a-1$ に対応する場面に手番はそのままで移行する。もし既知カードの中になければ、2枚目のカードは未知カード（$b-1$）枚の中からランダムに選ぶというやり方がわれわれの戦略Ⅰを形成する。

これに対比して、1枚目の選び方は同じであるが、1枚目のカードの数が既知カードの中にない場合、対戦相手に新しい情報を付加することを防ぐため、$1 \leqq a \leqq m-2$ のときには2枚目を既知カードの中から選び、それ以外の a の値に対しては、未知カード（$b-1$）枚の中から2枚目をランダムに選ぶというやり方が、戦略Ⅱを形成する。完全記憶の仮定の下では、a=m の場面に至れば、残り m 組のペアをすべて獲得することができる。この最も恵れた局面に移行する直前の $a=m-1$ のときは、a=0 のときと同様、戦略Ⅰと同じ方式を採用するしかない。2枚目のカードの選び方について、$1 \leqq a \leqq m-2$ の範囲に限って、戦略Ⅰとは異なる方式を採用した所以である。

このノートにおける主な指標は、得点（＝獲得した組の総数）の期待値であり、先手番と後手番の有利・不利を期待値のレベルで論じる。まず、完全記憶の仮定に入る前にその対極に位置するところの記憶欠如の仮定を§2で扱う。カードをめくる際に、場にある裏向きのカードの中からランダムに1つ選ぶという方式の下に神経衰弱を行う時、先手番の期待値（と分散）を調べる。このような状況では先手の方が常に有利であるが、その有利さは、カ

ードの数の上限 M が大きくなると減少し、期待値は両者とも公平な$\frac{M}{2}$に収束することが示される。

§３では、対戦する両者が戦略Ⅰを採用した場合を扱う。ゲーム開始（m=M, a=0）に相当する場面からだけではなく、一般の(m,a)の局面からスタートして、ゲーム終了時点での先手番の得点$X_{(m,a)}$を研究する。このとき、期待値$\mu(m,a)=E\left[X_{(m,a)}\right]$は、$a=m-r\,(r=1,2,3,\cdots)$とおいて、$r$の値の順に$m$の数列$\mu(m,m-r)$を調べると、うまく行く。特に、$r$を固定し$m\to\infty$とすると、$\mu(m,m-r)$の漸近挙動が明らかとなる（定理１参照）。十分大きなmに対し、先手の有利・不利は、rの偶・奇に応じて交互に入れ替る。

§４に移って、対戦する両者がともに戦略Ⅱを採用した場合、§３の結果はどのように変更されるか、詳述する。先手番の得点を$Y_{(m,a)}$、その期待値を$\nu(m,a)=E\left[Y_{(m,a)}\right]$と記して、主要な結果をここにまとめる：$m$の数列$\nu(m,m-r)$は、漸化式の解として$\mu(m,m-r)$よりも複雑な数式で表されるけれども、十分大きな$m$に対する先手の有利・不利は§３の$\mu(m,m-r)$の場合と同一である（定理２参照）。この事実は著者を驚かし、われわれの純粋戦略ⅠとⅡの優劣は、簡単に決着がつくものではないことを教えてくれる。

神経衰弱における「最適」戦略は、戦略Ⅰと戦略Ⅱを移り行く(m,a)の局面ごとに、巧みに使い分ける混合方式によって構築できるものと信じている。しかしながら、比較的小さな M の場合でさえ、現実に使い分けの具体策を提示することは、著者の現在の力量を越えているように思われる。

§２．記憶欠如の下でランダムにカードをめくるとどうなるか

１からＭまでの数が書かれたカードが２枚ずつ、全部で（２Ｍ）枚のカードを用いて、甲（先手番）と乙（後手番）の二人が「神経衰弱」を行う。両者ともめくられたカードの数が何であったか、即座に忘れてしまうと仮定し、場にある裏向きのカードの中からランダムに２枚のカードを選んでめくる。そのとき、カードの数が一致すれば得点１を得て、ゲームを続行する；カードの数が一致しなければ、裏向きのカードの枚数は変わらずに相手に手番が移行する。この方式が記憶欠如の仮定の下では自然なものとなる。ゲーム終了の時点で甲の獲得した得点をZ_Mと書くと、乙の得点は Ｍ$-Z_M$である（$0\leqq Z_M\leqq$ Ｍ）。

まず、Z_Mの確率分布$P(Z_M=k)=p_M(k)$を調べる。（2M）枚のカードの中からランダムに2枚のカードを撰ぶとき、数が一致する確率は$\frac{1}{2\,\mathrm{M}-1}$であるので、2重数列$p_M(k)$は、次の漸化式を満たす：

(2-1) $p_M(k)=\frac{1}{2\,\mathrm{M}-1}p_{M-1}(k-1)+\frac{2\,\mathrm{M}-2}{2\,\mathrm{M}-1}p_M(\mathrm{M}-k)\quad(\mathrm{M}=1,2,3,\cdots)$

初期条件は、$p_0(k)=\delta_{0,k}$である（ここで、$\delta_{j,k}=1\,(j=k);=0\,(j\neq k)$はクロネッカーの記法）。

上の漸化式は、Z_Mの母関数$G_M(t)=\sum_{k=0}^{M}p_M(k)\,t^k\ (G_0(t)=1)$に翻訳すると都合がよい：

(2-2) $G_M(t)=\frac{t}{2\,\mathrm{M}-1}G_{M-1}(t)+\frac{2\,\mathrm{M}-2}{2\,\mathrm{M}-1}t^M G_M\left(\frac{1}{t}\right)\quad(\mathrm{M}=1,2,3,\cdots)$

この式の右辺に、$G_M\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{(2\,\mathrm{M}-1)t}G_{M-1}\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{2\,\mathrm{M}-2}{(2\,\mathrm{M}-1)t^M}G_M(t)$を代入し、$G_M(t)$について解けば、次式に至る：

(2-3) $G_M(t)=\frac{2\,\mathrm{M}-1}{4\,\mathrm{M}-3}tG_{M-1}(t)+\frac{2\,\mathrm{M}-2}{4\,\mathrm{M}-3}t^{M-1}G_{M-1}\left(\frac{1}{t}\right)\quad(\mathrm{M}=1,2,3,\cdots)$

こうして、$G_1(t)=t,\quad G_2(t)=\frac{3}{5}t^2+\frac{2}{5},\quad G_3(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{8}{45}t^2+\frac{2}{9}t+\frac{4}{15},$

$G_4(t)=\frac{7}{39}t^4+\frac{128}{585}t^3+\frac{2}{9}t^2+\frac{44}{195}t+\frac{2}{13},\cdots$

という風に、関数列$G_M(t)$は順次定まって行く。

さて、Z_Mの平均値$E[Z_M]=G'_M(1)=\lambda_M$と分散

$Var[Z]=G''_M(1)+G'_M(1)-\left(G'_M(1)\right)^2=\sigma_M^2$の振舞いをそれぞれ考察して、この節を終えよう。

命題1．記憶欠如の下でランダムにカードをめくると、先手番が常に有利となる。すなわち、$\lambda_M>\frac{\mathrm{M}}{2}\quad(\mathrm{M}=1,2,3,\cdots)$。さらに、次式を得る：

(2-4) $\lambda_M-\frac{\mathrm{M}}{2}\leqq\frac{1}{4\,\mathrm{M}-3}\,(\mathrm{M}\geqq 2),\quad\lim_{M\to\infty}\mathrm{M}\,(\lambda_M-\frac{\mathrm{M}}{2})=\frac{1}{8}$

証明　数列$\lambda_M=G'_M(1)$の漸化式は、(2-3)から容易に導かれる：

(2-5)　$$\lambda_M = \frac{1}{4\,\mathrm{M}-3}\,\lambda_{M-1} + \frac{2\,\mathrm{M}^2-2\,\mathrm{M}+1}{4\,\mathrm{M}-3} \quad (\mathrm{M}=1,2,3,\cdots)$$

従って、$\lambda_M - \frac{\mathrm{M}}{2} = a_M$に書き直して、

(2-5')　$$a_M = \frac{1}{4\,\mathrm{M}-3}\,a_{M-1} + \frac{1}{2(4\,\mathrm{M}-3)} \quad (\mathrm{M}=1,2,3,\cdots)$$

を得、$a_M > 0 \quad (\mathrm{M}=1,2,3,\cdots)$が数学的帰納法でわかる。

$a_2 = \frac{1}{5} \leqq \frac{1}{4\,\mathrm{M}-3} < \frac{1}{2}$ $(\mathrm{M} \geqq 2)$に注意すると、$a_M \leqq \frac{1}{4\,\mathrm{M}-3}$ $(\mathrm{M} \geqq 2)$と

$\lim_{M\to\infty} \mathrm{M}\ a_M = \frac{1}{8}$とが容易に示される［証明了］。

<u>注意1.</u>　数列a_Mの母関数$A(t) = \sum_{M=1}^{\infty} a_M\, t^M$は、次の微分方程式の解である：

(2-6)　$$4t\,A'(t) - (t+3)A(t) = \frac{t}{2(1-t)}$$

また、積分表示

(2-6')　$$A(t) = \frac{1}{8}t^{\frac{3}{4}}\int_0^t \exp\left[\frac{t-u}{4}\right]\frac{du}{u^{\frac{3}{4}}(1-u)} \quad (0<t<1)$$

が成り立つ。

<u>命題2.</u>　先手番の得点Z_Mの標準偏差σ_Mは、次式を満たす：

(2-7)　$$\sigma_M \sim \frac{\sqrt{\mathrm{M}}}{2} \quad (\mathrm{M}\to\infty) \quad \text{i.e. } \lim_{M\to\infty}\frac{\sigma_M}{\sqrt{\mathrm{M}}} = \frac{1}{2}$$

<u>証明</u>　(2-3)を2回微分して、$t=1$を代入すれば次式に至る：

(2-7)　$$G_M''(1) - G_{M-1}''(1) = \frac{1}{4\,\mathrm{M}-3}\left\{(\mathrm{M}-1)(2\,\mathrm{M}-1) - 2(2\,\mathrm{M}^2-8\,\mathrm{M}+5)a_{M-1}\right\}$$

上式の右辺は、命題1を適用して、$\frac{\mathrm{M}-1}{2} + O\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right)$の大きさであることがわかる。従って$G_1''(1)=0$に留意すれば、

$$G_M''(1) = \sum_{k=2}^{M}\left\{\frac{k-1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\} = \frac{\mathrm{M}(\mathrm{M}-1)}{4} + O(H_M) = \left(\frac{\mathrm{M}}{2}\right)^2 - \frac{\mathrm{M}}{4} + O(\log \mathrm{M})$$

となる（$H_M=\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k}$ は調和級数)。こうして、

$$\sigma_M{}^2=\left(\frac{\mathrm{M}}{2}\right)^2-\frac{\mathrm{M}}{4}+\frac{\mathrm{M}}{2}+a_M-\left(\frac{\mathrm{M}}{2}+a_M\right)^2+O(\log \mathrm{M})=\frac{\mathrm{M}}{4}+O(\log \mathrm{M})$$

すなわち、$\sigma_M\sim\frac{\sqrt{\mathrm{M}}}{2}$を導くことができる［証明了]。

§3　戦略Ⅰ：完全記憶の下で、未知カードをランダムにめくるとどうなるか

§1で述べたように、完全記憶を保持する甲（先手番)、乙（後手番）二人が戦略Ⅰに従って、「神経衰弱」を行う。m組のカードのうち、数の一致を含まぬ既知カードがa枚、未知カードが$(2m-a)$枚という（ゲーム途中の）局面からスタートして、ゲーム終了時における甲の得点を$X_{(m,a)}$とする$(m=1,2,3,\cdots;0\leqq a\leqq m)$。もちろん、神経衰弱のゲーム開始は、本当は$m=\mathrm{M},a=0$の場合であり、甲の得点は$X_{(M,0)}$、乙の得点は$\mathrm{M}-X_{(M,0)}$である。

この節では、$X_{(m,a)}$の平均値$E\left[X_{(m,a)}\right]=\mu(m,a)$を記述する数式（分数式）を与え、いつ先手有利（i.e. $\mu(m,a)>\frac{m}{2}$）になるか、詳しく分析する。前節の状況とは異なり、先手の有利・不利は、(m,a)の値によって変化する。$a=m$という極端な局面に入った際、手番の者は残りのカードすべて、つまり得点mを獲得できる点から、このような変動が生まれると考えられる。

まず、$X_{(m,a)}$の確率分布$P(X_{(m,a)}=k)=p_{(m,a)}(k)$ $(0\leqq k\leqq m)$について、(m,a)の二重数列としての漸化式を導く（$p_{(m,m)}(k)=\delta_{m,k}$）：

$$p_{(m,a)}(k)=\frac{a}{2m-a}p_{(m-1,a-1)}(k-1)+\frac{2(m-a)}{(2m-a)(2m-a-1)}\{T\};\tag{3-1}$$

$$T=p_{(m-1,a)}(k-1)+a\,p_{(m-1,a)}(m-1-k)+2(m-a-1)\,p_{(m,a+2)}(m-k)$$

上式右辺の第一項は、未知カードの中からランダムにめくった1枚目のカードの数が、既知カードの中にある場合に相当し、第二項は既知カードの中にはない場合で、2枚目の未知カードをランダムにめくると、3つのケース（Tの3つの項に対応）に枝分かれする：イ）偶然1枚目と2枚目の数が一致する；ロ）2枚目の数が既知カードの中にあり、乙の手番に

移って必ずそのペアが獲得される；ハ）乙の手番に移り、１枚目と２枚目のカードの数が記憶され、既知カードの枚数は２枚増えて$(a+2)$枚になる。

漸化式(3-1)は、$X_{(m,a)}$の母関数$G_{(m,a)}(t)=\sum_{k=0}^{m} p_{(m,a)}(k)\,t^k$によって書き直すとわかりやすい：

$$G_{(m,a)}(t)=\frac{at}{2m-a}G_{(m-1,a-1)}(t)+\frac{2(m-a)}{(2m-a)(2m-a-1)}\{T'\};$$

(3-2)

$$T'=tG_{(m-1,a)}(t)+at^{m-1}G_{(m-1,a)}\left(\frac{1}{t}\right)+2(m-a-1)t^m G_{(m,a+2)}\left(\frac{1}{t}\right)$$

境界条件をなす$G_{(m,m)}(t)=t^m \quad (m=0,1,2,\cdots)$に留意すれば、関数列$G_{(m,a)}(t)$は順次確定して行く。

$$G_{(1,0)}(t)=t;\ G_{(2,1)}(t)=\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{3},\quad G_{(2,0)}(t)=\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{3};$$

$$G_{(3,2)}(t)=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{6}t+\frac{1}{3},\ G_{(3,1)}(t)=\frac{1}{5}t^3+\frac{1}{15}t^2+\frac{1}{5}t+\frac{8}{15},$$

$$G_{(3,0)}(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^2+\frac{2}{15}t+\frac{2}{5};$$

$$G_{(4,3)}(t)=\frac{2}{5}t^4+\frac{1}{10}t^2+\frac{1}{5}t+\frac{3}{10},\ G_{(4,2)}(t)=\frac{2}{15}t^4+\frac{1}{9}t^3+\frac{2}{15}t^2+\frac{2}{9}t+\frac{2}{5},$$

$$G_{(4,1)}(t)=\frac{26}{105}t^4+\frac{23}{105}t^3+\frac{14}{105}t^2+\frac{1}{7}t+\frac{9}{35},$$

$$G_{(4,0)}(t)=\frac{41}{105}t^4+\frac{22}{105}t^3+\frac{2}{15}t^2+\frac{16}{105}t+\frac{4}{35};$$

$$G_{(5,4)}(t)=\frac{1}{3}t^5+\frac{1}{15}t^3+\frac{2}{15}t^2+\frac{1}{5}t+\frac{4}{15},\ \cdots$$

さて、$X_{(m,a)}$の平均値$E\left[X_{(m,a)}\right]=G'_{(m,a)}(1)=\mu(m,a)$の研究に入る。

$a=m-r$とおくと、(m,r)の２重数列$\mu(m,m-r)$について、次の漸化式が(3-2)から従う：

(3-3)　$$\mu(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{1+\mu(m-1,m-1-r)\}+\frac{2r}{(m+r)(m+r-1)}\{T''\}$$

$$T'' = 1 + \mu(m-1, m-r) + (m-r)(m-1-\mu(m-1, m-r)) + 2(r-1)(m-\mu(m; m-r+2))$$

$r=0$のときは明らかに$\mu(m,m)=m$。$r=1$のとき、(3-3)は、

$\mu(m,m-1)=\dfrac{m-1}{m+1}\mu(m-1,m-2)+1$となり、容易に次式が示される：

(3-4-1) $\mu(m,m-1)=\dfrac{m+2}{3} \quad (m=1,2,\cdots)$

注意 2. $\mu(m,m-1)>\dfrac{m}{2}$となるのは、$1 \leqq m \leqq 3$に限られる。そして、$m=4$のとき、$\mu(4,3)=2$であるが、甲が3以上の得点を得る確率は$\dfrac{2}{5}$、1以下の得点を得る確率は$\dfrac{1}{2}$である。平均値はちょうど$\dfrac{m}{2}$に等しくなるけれども、$m=4, a=3$の場合は先手番が不利とみなされる。

$r=2$のとき、(3-3)と(3-4-1)から、

$$\mu(m,m-2)=\frac{m-2}{m+2}\mu(m-1,m-3)+\frac{11m^2-31m+42}{3(m+2)(m+1)} \quad (m \geqq 2)$$

を導く。この漸化式は、解

(3-4-2) $\mu(m,m-2)=\dfrac{11m^2-25m+46}{15(m+2)} \quad (m \geqq 2)$

を産出する。$\mu(m,m-2)>\dfrac{m}{2}$となるのは、$m \geqq 11$ の範囲であることがわかる。

このように、rに関し順次、mの数列 $\{\mu(m,m-r); m \geqq r\}$ が分数式の形で定まって行くことが予想され、次の定理に到達する。

定理 1.

i) $\mu(m,m-r)$は次の形の分数式で表される：

(3-4-r) $\mu(m,m-r)=\dfrac{\phi_r(m)}{(m+2)(m+3)\cdots(m+r)} \quad (m \geqq r \geqq 2)$

ここで、$\phi_r(m)=\alpha_r m^r+\sum_{k=1}^{r}\beta_{r,k}\, m^{r-k}$ はr次多項式でその係数はすべて（証明中の(3-6)式によって）確定する。

ii）極限値 $\lim_{m\to\infty}\dfrac{\mu(m,m-r)}{m}=\alpha_r$ が存在して、数列 $\alpha_r(\alpha_0=1)$ は漸化式

(3-5) $\alpha_r=1-\dfrac{2r}{2r+1}\alpha_{r-1}\quad(r=1,2,3,\cdots)$

を満たす。さらに次式が成り立つ（$\beta_{r,1}$ が満たす漸化式は証明中の(3-5')）：

$$\lim_{m\to\infty}\{\mu(m,m-r)-\alpha_r m\}=\beta_{r,1}-\frac{(r+2)(r-1)}{2}\alpha_r$$

証明　(3-4-r)の分数式を漸化式(3-3) に代入し、ϕ_r に関して整理すると、

(3-6)

$$(m+1)\phi_r(m)-(m-r)\phi_r(m-1)=-2r(m-r-1)\phi_{r-1}(m-1)-4r(r-1)(m+1)\phi_{r-2}(m)$$
$$+\prod_{j=1}^{r-2}(m+j)\{(2r+1)m^2+(2r^2-6r-1)m+r^2+3r\}$$

を得る。数学的帰納法の仮定によって、(3-6)の右辺の $\phi_{r-1}(m-1)$ と $\phi_{r-2}(m)$ の係数がすべてわかっているとせよ。このとき、$\phi_r(m)$ の係数 $\alpha_r,\beta_{r,k}\ (1\leqq k\leqq r)$ をすべて決定できればよい。(3-6)の右辺は変数 m の r 次多項式であり、

$$m^r\{2r+1-2r\alpha_{r-1}\}+m^{r-1}\left\{\frac{2r^3-r^2-11r}{2}+4r^2\alpha_{r-1}-4r(r-1)\alpha_{r-2}-2r\beta_{r-1,1}\right\}$$
$$+\sum_{k=2}^{r}c_k\,m^{r-k}$$

という風に計算される。ここで、m^{r-k} の係数 c_k は複雑な式で表されるけれども、すべて既知数である。

一方(3-6)の左辺は、以下のように計算される。

$$(m+1)\phi_r(m)=\alpha_r m^{r+1}+(\alpha_r+\beta_{r,1})m^r+\sum_{k=1}^{r-1}(\beta_{r,k+1}+\beta_{r,k})m^{r-k}+\beta_{r,r}$$

$$(m-r)\phi_r(m-1)=(m-r)\left\{\alpha_r\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k m^{r-k}+\sum_{k=1}^{r}\beta_{r,k}\sum_{j=0}^{r-k}\binom{r-k}{j}(-1)^j m^{r-k-j}\right\}$$

$$=\alpha_r\left\{m^{r+1}-2rm^r-\sum_{k=1}^{r-1}\left\{\binom{r}{k+1}+r\binom{r}{k}\right\}(-1)^k m^{r-k}-r(-1)^r\right\}$$

$$-\sum_{h=1}^{r}(rm^{r-h}-m^{r+1-h})\sum_{j=1}^{h}\binom{r-j}{r-h}(-1)^{h-j}\beta_{r,j}$$

から、上の２式の差をとって整理すると、次式に到達する：

$$(2r+1)\alpha_r m^r+\left\{(1+r)\beta_{r,r}+r\alpha_r(-1)^r+r\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{r-j}\beta_{r,j}\right\}+\sum_{k=1}^{r-1}\Lambda_k m^{r-k}\ ;$$

$$\Lambda_k=(1+2r-k)\beta_{r,k}+\alpha_r(-1)^k\left(\binom{r}{k+1}+r\binom{r}{k}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\beta_{r,j}\left(r\binom{r-j}{r-k}+\binom{r-j}{r-k-1}\right)$$

従って、まず両辺のm^rの項を比べれば、$(2r+1)\alpha_r=2r+1-2r\alpha_{r-1}$
から、α_rは確定し、漸化式(3-5)が成り立つ。次にm^{r-1}の項を比べると、

$$\Lambda_1=2r\beta_{r,1}-\alpha_r\left(\binom{r}{2}+r^2\right)=\frac{2r^3-r^2-11r}{2}+4r^2\alpha_{r-1}-4r(r-1)\alpha_{r-2}-2r\beta_{r-1,1}$$

を得、$\beta_{r,1}$を次式のごとく決定できる：

(3-5') $$\beta_{r,1}=\frac{2r^2-r-11}{4}+\left\{\frac{3r-1}{4}\alpha_r+2r\alpha_{r-1}-2(r-1)\alpha_{r-2}\right\}-\beta_{r-1,1}$$

$$=\frac{r^3+4r^2-3r-3}{2r+1}-\frac{(r-1)(13r^2+5r-2)}{4r^2-1}\alpha_{r-2}-\beta_{r-1,1}$$

このようにして、$\beta_{r,k}(k=2,3,\cdots,r)$は$k$の値の順番に、つぎつぎと決定して行くことができる。

ii）の２つの極限値は、(3-4-r)式の直接の産物である［証明了］。

定理の証明に出て来た再帰的な関係式((3-5)(3-5')など)を利用して、$\phi_3(m),\phi_4(m),\phi_5(m)$の具体形を順番に求めると、次の結果を見出す：

(3-4-3) $$\mu(m,m-3)=\frac{39m^3+680m^2-1541m+1860}{105(m+2)(m+3)}\quad(m\geqq 3)$$

(3-4-4) $$\mu(m,m-4)=\frac{211m^4-571m^3+22160m^2-35156m+44784}{315(m+2)(m+3)(m+4)}\quad(m\geqq 4)$$

(3-4-5)

$$\mu(m,m-5)=\frac{813m^5+32034m^4-222509m^3+1594266m^2-2411452m+2832792}{2079(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$
$$(m\geqq 5)$$

そして、$\mu(m,m-3)>\frac{m}{2}$の解は、$4\leqq m\leqq 25$；

$\mu(m,m-4)>\frac{m}{2}$の解は、$4\leqq m\leqq 10$と$25\leqq m$；

$\mu(m,m-5)>\frac{m}{2}$の解は、$15\leqq m\leqq 55$。

系1.

i) rが奇数ならば、$\alpha_r<\frac{1}{2}$；rが偶数ならば、$\alpha_r>\frac{1}{2}$である。

ii) 自然数M_rが存在して、すべての$m\geqq M_r$に対し、rが奇数ならば

$\mu(m,m-r)<\frac{m}{2}$、rが偶数ならば$\mu(m,m-r)>\frac{m}{2}$となる。

証明

i) 漸化式(3-5)から、

$$\alpha_r=1-\frac{2r}{2r+1}\left(1-\frac{2(r-1)}{2r-1}\alpha_{r-2}\right)=\frac{1}{2r+1}+\frac{4r(r-1)}{(2r+1)(2r-1)}\alpha_{r-2}\quad(r\geqq 2)$$

が従う。もし$\alpha_{r-2}<\frac{1}{2}$ならば、$\alpha_r<\frac{1}{2r+1}+\frac{2r(r-1)}{(2r+1)(2r-1)}=\frac{2r^2-1}{4r^2-1}<\frac{1}{2}$

を得る。$\alpha_1=\frac{1}{3}$なので、すべての奇数rに対し、$\alpha_r<\frac{1}{2}$が成り立つ。

また、$\alpha_{2k}=1-\frac{4k}{4k+1}\alpha_{2k-1}>1-\frac{2k}{4k+1}=\frac{2k+1}{4k+1}>\frac{1}{2}$。

ii) rが奇数のとき、不等式$\mu(m,m-r)=\frac{\phi_r(m)}{(m+2)\cdots(m+r)}<\frac{m}{2}$は、

$$2\phi_r(m)-m(m+2)\cdots(m+r)=(2\alpha_r-1)m^r+(m\text{の}r-1\text{次多項式})<0$$

と書かれる。$2\alpha_r-1<0$なので、このr次多項式の最大のゼロ点m_*を選び、自然数$M_r>m_*$をとれば、すべての$m\geqq M_r$に対し、上の不等式が成り立つ。rが偶数のときも、同様に示される［証明了］。

系1の限界値M_rを一般のrに対し書き下すことは困難であるが、前に述べた結果から$M_1=5, M_2=11, M_3=26, M_4=25, M_5=56$となっている。

§4. 戦略Ⅱ：2枚目は既知カードから選ぶとどうなるか

前節の状況で、甲（先手番）乙両者が戦略Ⅰのかわりに戦略Ⅱを採用すればどうなるか。すなわち、m組のカードのうち、既知カードがa枚、未知カードが$(2m-a)$枚という局面からスタートして、ゲーム終了時における甲の得点を$Y_{(m,a)}$とし、その平均値$v(m,a)=E\left[Y_{(m,a)}\right]$を調べる。そして、前節の定理1に対応する定理2を証明するのが、この節の目的である。

まず、$Y_{(m,a)}$の確率分布$P(Y_{(m,a)}=k)=q_{(m,a)}(k)$と、母関数$H_{(m,a)}(t)=\sum_{k=0}^{m} q_{(m,a)}(k)t^k$について、漸化式をそれぞれ求めよう。$m\geqq 3$で$1\leqq a\leqq m-2$のとき、戦略Ⅱに従うと、

(4-1)
$$q_{(m,a)}(k)=\frac{a}{2m-a}q_{(m-1,a-1)}(k-1)+\frac{2(m-a)}{2m-a}q_{(m,a+1)}(m-k)$$

となる。$a=0$と$a=m-1$に対しては戦略Ⅰと同じであるので、

(4-1')
$$q_{(m,0)}(k)=\frac{1}{2m-1}q_{(m-1,0)}(k-1)+\frac{2(m-1)}{2m-1}q_{(m,2)}(m-k)$$
$$q_{(m,m-1)}(k)=\frac{m-1}{m+1}q_{(m-1,m-2)}(k-1)+\frac{2}{(m+1)m}\left\{\delta_{k,m}+(m-1)\delta_{k,0}\right\}$$

を得る。従って、$H_{(m,a)}(t)$の漸化式は次の形をとることがわかる：

(4-2)
$$H_{(m,a)}(t)=\frac{a}{2m-a}t\,H_{(m-1,a-1)}(t)+\frac{2(m-a)}{2m-a}t^m H_{(m,a+1)}\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$(m\geqq 3,\ 1\leqq a\leqq m-2);$$
$$H_{(m,0)}(t)=\frac{1}{2m-1}t\,H_{(m-1,0)}(t)+\frac{2(m-1)}{2m-1}t^m H_{(m,2)}\left(\frac{1}{t}\right)$$
$$H_{(m,m-1)}(t)=\frac{m-1}{m+1}t\,H_{(m-1,m-2)}(t)+\frac{2}{(m+1)m}(t^m+m-1)$$

$H_{(m,m)}(t)=G_{(m,m)}(t)=t^m$から$H_{(m,m-1)}(t)=G_{(m,m-1)}(t)$が従い、$m\leqq 2$ならば常に$H_{(m,a)}(t)=G_{(m,a)}(t)$が成り立つ。また、$m\geqq 3$に対し、$H_{(m,0)}(t)=H_{(m,1)}(t)$となる。

$H_{(m,a)}(t)$が(4-2)によって順次定まって行く仕組みは、$G_{(m,a)}(t)$の場合と同様である。

平均値$v(m,a)=H'_{(m,a)}(1)$の考察に入る。$v(2,0)=\frac{2}{3}<v(2,1)=\frac{4}{3}$,

$v(m,m-1)=\frac{m+2}{3}$ そして、$m\geqq 3$ならば$v(m,0)=v(m,1)$が成り立つ。従って、

$2\leqq r\leqq m-2$の範囲にrを固定して、mの数列$v(m,m-r)$を次の漸化式によって調べればよい：

(4-3)

$$v(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{1+v(m-1,m-1-r)\}+\frac{2r}{m+r}\{m-v(m,m-(r-1))\}$$

補題1.　$v(m,m-(r-1))\leqq\frac{m}{2}$と仮定する。このとき、

$v(m-1,m-1-r)>\frac{m-1}{2}$ならば、$v(m,m-r)>\frac{m}{2}$となる。

証明　(4-3)によって、

$$v(m,m-r)>\frac{m-r}{m+r}(1+\frac{m-1}{2})+\frac{2r}{m+r}(m-\frac{m}{2})=\frac{m^2+mr+(m-r)}{2(m+r)}>\frac{m}{2}$$

を導く［証明了］。

$r=2$の場合、$v(m,m-1)=\frac{m+2}{3}\leqq\frac{m}{2}$ $(m\geqq 4)$,　$v(3,1)=\frac{7}{5}<\frac{3}{2}$,

$v(4,2)=\frac{32}{15}>2$に注意すれば、補題1によってすべての$m\geqq 4$に対し、

$v(m,m-2)>\frac{m}{2}$がわかる。この事は、$v(m,m-2)$を表す分数式を以下のように導くことからも示される。$v(m,m-2)$が満たす漸化式

$$v(m,m-2)=\frac{m-2}{m+2}v(m-1,m-3)+\frac{11m-14}{3(m+2)}$$

を、初期値$v(2,0)=\frac{2}{3}$の斉合性に留意して解けば、容易に次式を得る：

(4-4-2)　　$$v(m,m-2)=\frac{11m^2+10m-24}{15(m+2)}\quad(m\geqq 2)$$

次に$r=3$の場合に移ると、漸化式(4-3)が含意する初期値

$v(3,0)=3-v(3,1)=\frac{8}{5}$と実際の値$v(3,0)=v(3,1)=\frac{7}{5}$とのくい違いが生まれる。この事実を受けて、われわれは$v(m,m-3)$を2つの部分に分解する：

$$v(m,m-3)=v_0(m,m-3)+v_1(m,m-3)$$

ここで、$v_0(m,m-3)\quad(m\geqq 3)$を定めるのは(4-3)と同じ式（$v_0(3,0)=\frac{8}{5}$）。つまり、

$$v_0(m,m-3)=\frac{m-3}{m+3}v_0(m-1,m-4)+\frac{13m^2+35m+18}{5(m+3)(m+2)}$$

これは解$v_0(m,m-3)=\frac{13m^3+82m^2+163m+102}{35(m+2)(m+3)}$を産出する。他方、$v_1(m,m-3)$は、初期値$v_1(3,0)=v(3,0)-v_0(3,0)=-\frac{1}{5}$とより単純な漸化式

$$v_1(m,m-3)=\frac{m-3}{m+3}v_1(m-1,m-4)$$

で規定される数列である。従って、解$v_1(m,m-3)=-\frac{1}{5}\cdot\frac{(m-3)(m-4)\cdots 1}{(m+3)(m+2)\cdots 7}$

を得るので、$v(m,m-3)$の次の表現式に到達する：

(4-4-3)

$$v(m,m-3)=\frac{13m^3+82m^2+163m+102}{35(m+2)(m+3)}-\frac{1}{5}\frac{6!}{(m+3)(m+2)\cdots(m-2)}\quad(m\geqq 3)$$

$r=4$の場合に入って、mの数列$v(m,m-r)\ (r=4,5,\cdots)$の一般形が浮かびあがる：

$$v(m,m-4)=v_0(m,m-4)+v_1(m,m-4)+v_2(m,m-4)$$

ここで$v_0(m,m-4)$は、(4-3)と同型の漸化式が定める部分である：

$$v_0(m,m-4)=\frac{m-4}{m+4}\{1+v_0(m-1,m-5)\}+\frac{8}{m+4}\{m-v_0(m,m-3)\}$$

初項は$v_0(4,0)=4-v_0(4,1)=\frac{71}{35}$であり、$v_0(m,m-3)$の表現式を使って、

$$v_0(m,m-4)=\frac{211m^4+1694m^3+3641m^2-266m-4920}{315(m+2)(m+3)(m+4)}$$

と表すことができる。

次に$v_1(m,m-4)$は、初項のずれを調整する部分である。$v(4,0)=v(4,1)=\frac{68}{35}$から、

$v_1(4,0)=v(4,0)-(4-v(4,1))=2v(4,1)-4=-\frac{4}{35}$を初期値にもち、

$$v_1(m,m-4)=\frac{m-4}{m+4}v_1(m-1,m-5)$$

によって決定される数列となる。従って、

$$v_1(m,m-4)=-\frac{4}{35}\frac{8!}{(m+4)(m+3)\cdots(m-3)}$$ と書くことができる。

最後の部分$v_2(m,m-4)$は、(4-3)の右辺第二項における$v(m,m-3)$を$v_0(m,m-3)$に置き換えたことから生じる。すなわち、次の漸化式を考える：

$$v_2(m,m-4)=\frac{m-4}{m+4}v_2(m-1,m-5)-\frac{8}{m+4}\{v(m,m-3)-v_0(m,m-3)\}$$

$$=\frac{m-4}{m+4}v_2(m-1,m-5)+\frac{8}{5}\frac{6!}{(m+4)(m+3)\cdots(m-2)}\quad(m\geqq 4)$$

ここで、$x_m=\frac{(m+4)(m+3)-(m-3)}{8!}v_2(m,m-4)\quad(m\geqq 4)$とおくと、上式は

$x_m-x_{m-1}=\frac{m-3}{35}$となる。結局、

$$x_m=\sum_{k=5}^{m}\frac{k-3}{35}+x_4=\frac{(m-1)(m-4)}{70}+\frac{1}{35}=\frac{(m-2)(m-3)}{70}$$

を得る。こうして、$v_2(m,m-4)=\frac{8!}{70(m+4)(m+3)\cdots(m-1)}$がわかったので、

求める解の表現式は次の形をとる：

(4-4-4) $$v(m,m-4)=\frac{211m^4+1694m^3+3641m^2-266m-4920}{315(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+\frac{8!(m^2-5m-2)}{70(m+4)(m+3)\cdots(m-1)(m-2)(m-3)}$$

一般のrの場合、$v(m,m-r+1)$を既知として、$v(m,m-r)$に進む際、

$r=4$のとき詳述した(4-3)の解法が有効となる：

(4-5) $$v(m,m-r)=v_0(m,m-r)+v_1(m,m-r)+v_2(m,m-r)\quad(m\geqq r)$$

イ）分解の主要項$v_0(m,m-r)$は(4-3)と同型の漸化式

(4-6)

$$v_0(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{1+v_0(m-1,m-1-r)\}+\frac{2r}{m+r}\{m-v_0(m,m-r+1)\}$$

によって定まり、その解は前節と類似の分数式で表される：

(4-7) $$v_0(m,m-r)=\frac{\psi_r(m)}{(m+2)(m+3)\cdots(m+r)},\quad \psi_r(m)=\alpha_r m^r+\sum_{k=1}^{r}\gamma_{r,k}m^{r-k}$$

r次多項式$\psi_r(m)$が満たす漸化式は、

(4-8)

$$(m+1)\psi_r(m)-(m-r)\psi_r(m-1)=-2r(m+1)\psi_{r-1}(m)+(m+1)\cdots(m+r-1)((2r+1)m-r)$$

であり、左辺は(3-6)と同形なので、前節の計算がそのまま役に立つ。

(4-8)の右辺は、$\psi_{r-1}(m)$を既知と仮定して、

$$m^r\{2r+1-2r\alpha_{r-1}\}+m^{r-1}\left\{\frac{r}{2}(2r^2-r-3)-2r(\alpha_{r-1}+\gamma_{r-1,1})\right\}+\sum_{k=2}^{r}d_k m^{r-k}$$

という風に計算され、m^rの係数α_rは前節の$\phi_r(m)$のそれと一致する。他方、m^{r-1}の係数$\gamma_{r,1}$は、$\phi_r(m)$の係数$\beta_{r,1}$とは異なり、次の漸化式で定まる：

(4-9) $$\gamma_{r,1}=\frac{2r^2-r-3}{4}+\frac{3r-1}{4}\alpha_r-\alpha_{r-1}-\gamma_{r-1,1}$$

そして、$\gamma_{r,k}$も同様の手順で、kの値の順番に定まっていくことが示される。

ロ）(4-5)の第2項$v_1(m,m-r)$は、初期値

$v_1(r,0)=v(r,0)-(r-v(r,1))=2v(r,1)-r$をもち、

(4-10) $$v_1(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}v_1(m-1,m-1-r)$$

によって定まる数列である。従って、

(4-11) $$v_1(m,m-r)=\frac{(2r)!}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}(2v(r,1)-r)$$

を得る。

ハ）(4-5)の第3項$v_2(m,m-r)$は、次の漸化式を満たす数列である：

(4-12)

$$v_2(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}v_2(m-1,m-1-r)-\frac{2r}{m+r}\{v_1(m,m-r+1)+v_2(m,m-r+1)\}$$

$y_m=\dfrac{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}{(2r)!}v_2(m,m-r)\quad(m\geqq r)$とおけば、(4-12)は

(4-12')

$$y_m - y_{m-1} = -\frac{(m+r-1)\cdots(m-r+1)}{(2r-1)!}\left\{\nu_1(m,m-r+1)+\nu_2(m,m-r+1)\right\}$$

と書き直される。

さて、$r \geqq 3$に対し、$\nu_1(m,m-r)+\nu_2(m,m-r)$は次の形の表現式をもつことを主張する：

(4-13) $$\nu_1(m,m-r)+\nu_2(m,m-r) = \frac{(2r)!\omega_r(m)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}$$

ここで、$\omega_r(m)$は、$2(r-3)$次の多項式である。$r-1$のとき(4-13)が成り立つと仮定すれば、$y_m - y_{m-1} = -\frac{m-r+1}{2r-1}\omega_{r-1}(m)$が$(2(r-4)+1)$次の多項式となり、

$$y_m = y_r - \frac{1}{2r-1}\sum_{k=r+1}^{m}(k-r+1)\,\omega_{r-1}(k) \quad (y_r = \nu_2(r,0) = -\nu_1(r,1) - \nu_2(r,1))$$

は、$2(r-3)$次の多項式となる。(4-11)に注意して、

(4-14) $$\omega_r(m) = (\nu(r,1)+\nu_0(r,1)-r) - \frac{1}{2r-1}\sum_{k=r+1}^{m}(k-r+1)\,\omega_{r-1}(k)$$

とおけば、(4-13)はrのときも成り立つことがわかる。こうして数学的帰納法が完結し、(4-13)式はすべての$r \geqq 3$に対し、示される。

以上論述したことを、次の定理にまとめる。

<u>定理2.</u>

i) $\nu(m,m-r)$は、次の形の分数式で表される：

(4-15)

$$\nu(m,m-r) = \frac{\psi_r(m)}{(m+2)(m+3)\cdots(m+r)} + \frac{(2r)!\omega_r(m)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}$$

ここで、r次多項式$\psi_r(m) = \alpha_r m^r + \sum_{k=1}^{r}\gamma_{r,k}m^{r-k}$は(4-8)で定まり、$2(r-3)$次の多項式$\omega_r(m)$は、(4-14)で定まる。

ii) $\lim_{m\to\infty}\frac{\nu(m,m-r)}{m} = \alpha_r = \lim_{m\to\infty}\frac{\mu(m,m-r)}{m}$を得る。さらに、次式が成り立つ（$\gamma_{r,1}$が満たす漸化式は(4-9)）：

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\nu(m,m-r)-\alpha_r m\right\} = \gamma_{r,1} - \frac{(r+2)(r-1)}{2}\alpha_r$$

<u>系 2.</u>　自然数N_rが存在して、すべての$m \geqq N_r$に対し、rが奇数ならば

$v(m,m-r)<\frac{m}{2}$、rが偶数ならば$v(m,m-r)>\frac{m}{2}$となる。

系 2 の限界値N_rを一般的に決定する問題は困難であるが、補題 1 を利用して、$N_1=5,\quad N_2=4,\quad N_3=3,\quad N_4=5,\cdots$が示される。

謝辞　こみ入った数式を含む読みづらい原稿を、提出期限の迫り来る中、ワープロ清書に骨を折って下さった鴨藤江利子さんに深謝申し上げます。