HamaMed-Repository
浜松医科大学学術機関リポジトリ
浜松医科大学
Hamamatsu University School of Medicine

カード・ゲームの数理ノートⅡ;「神経衰弱」における戦略について

メタデータ	言語: Japanese
	出版者:
	公開日: 2013-08-27
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 野田, 明男
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/10271/239

浜松医科大学紀要　一般教育　第16号（2002）

カード・ゲームの数理ノートⅡ；「神経衰弱」における戦略について

野田明男
（数学）

A Mathematical Note of Card Games, Ⅱ; on Some Strategies in the Concentration Game

Akio NODA
Mathematics

Abstract: This is a continuation of the author's previous paper [1]. Under different conditions on the capacity of memory for two persons who play the concentration game, we study the scores X and Y of the both players, which depend upon the changing situations of this card game. Indeed, we discuss three players A, B and C, A having a perfect memory, B memorizing only the last card exposed by his opponent and C having no memory. We then show that A can win a great advantage over B and B can win a suitable advantage over C, by solving a system of difference equations and establishing some estimates of the mean values of X and Y. In addition, we investigate a comparison problem of the two strategies that are defined and studied in [1].

Key words: strategy, card game, expectation, a system of difference equations, asymptotics.

§1. 序

これは本誌前号に発表した著者の論文［1］の続編であり、甲と乙２人で行う「神経衰弱」というカード・ゲームを［1］に引き続いて論じる。一度めくられたカードを記憶する能力

に関して同一の条件を設定して、2人が同一の戦略を採用して対戦する［1］の状況とは異なり、ここでは記憶に関して異なる条件を課す。このとき、未知カードの中からランダムに1枚のカードを選択するという偶然変動（数の一致が起こる幸運）をはらむゲームを行えば、記憶において優位に立つ方の有利さはどれほどになるだろうか。この問題について、§2において3通りの対戦（ケース a,b,c）を調べ、期待できる得点を定量的に解析する。また、完全記憶の仮定の下では、戦略ⅠとⅡの2つの戦略が考えられたが（［1］参照）、戦略Ⅰを採用する甲と戦略Ⅱを採用する乙の対戦を§3で考察する。そして、2つの戦略のうちどちらがより望ましい戦略であるかという問題に答えようとして、現時点で得られた成果をまとめたのが、この続編の内容である。神経衰弱における最適戦略の探求というわれわれの目標達成には、まだまだ道遠しの感があるけれども。

さて、記憶能力に関する条件として§2において設定するのは、最大記憶容量Γ、すなわち、めくられたカードはΓ枚までなら記憶できるという仮定である。現実にわれわれが取りあげて論じるのは、$\Gamma=0$（何も記憶できぬ C）、$\Gamma=1$（直前にめくられたカード1枚だけを記憶する B）、そして$\Gamma=\infty$（めくられたカードすべてを完全に記憶する A）の3者である。B と A、両者の対戦（ケース c）における局面表示の複雑さから見て取れるように、$2 \leqq \Gamma < \infty$の場合をさらに追求するのはとても大変であり、著者の力量では断念せざるを得なかった。かくして上記 A,B,C 3者間の3通りの対戦を取りあげる。

甲が手番の局面において、甲の得点期待値e_m（ケース a：C と B の対戦）、$e_m(r,l)$（ケース b：C と A の対戦）、そして$e_m(r,l,\varepsilon)$（ケース c：B と A の対戦）に着目し、残りの組数mが大きくなるときの漸近挙動をそれぞれ分析する。（ここで数列a_mの漸近挙動（asymptotics）に関する記号および基本的事項については、文献［2］に従う。）序における要約として、極限値に関する結果のみ記すと、次のようになる：

$$\lim_{m\to\infty}\frac{e_m}{m}=\frac{1}{3}\ \text{（定理1）、}\ \lim_{m\to\infty}e_m(r,l)=0\ \text{（定理3）、そして}$$

$$\lim_{m\to\infty}e_m(r,l,\varepsilon)=0\ \text{（定理4）。}$$

互いに異なる条件の2者の対戦では、甲が手番のときの上記3つの量に附随して、手番が乙に移ったときの甲の得点期待値$f_m(a), g_m(r)$, そして$h_m(r)$をそれぞれ合わせ考えなければならぬ。つまり、漸化式は、同一条件の2者を扱った［1］の単一方程式とは違い、例えばケース a の場合e_mと$f_m(a)$　$(a=0,1)$が同時に出現する連立方程式の形になる。従って、厳密解を求めることは格段に難しくなる。なお、後者の量について、極限値は上記前者の場合と同じ値であるが、その漸近挙動を詳しく調べると微妙な差異を示す。ゲームの局

面がどちらの手番であるかによって生じるところの、この差異こそ、子供向けの単純なカード・ゲームがもつ（数理的な意味合いでの）奥深さを垣間見させてくれるものに他ならぬと考える。

最後の§3においては、［1］で取りあげた2つの戦略、ⅠとⅡの比較問題を論じる。すなわち、戦略Ⅰをとる甲と戦略Ⅱをとる乙が神経衰弱を行うとき、既知カードの枚数が $m-r$ となった局面で、手番の者の得点期待値 $\mu_1(m,m-r)$（甲の場合）および $v_2(m,m-r)$（乙の場合）を同時に解析する。戦略ⅠおよびⅡ同士の対戦における $\mu(m,m-r)$ と $v(m,m-r)$ に関する［1］の結果を参照しつつ、$m\to\infty$ のときの $\mu_1(m,m-r)$ および $v_2(m,m-r)$ の漸近挙動を明らかにする（定理5および系6）。その際生じる4種類の係数 $\alpha_r,\beta_{r,1},\gamma_{r,1}$ そして κ_r の数学的性質は、r の偶奇によって全く異なってしまう。この興味ある現象は、定理5だけでなく、注意2においても言及される。

謝辞　［1］の続きとして解決したいと考えた種々の問題は、実は［1］のレフェリーによって問われた問題（§2のケースbとして定式化される）から派生している。［1］をまとめた1年前の時点では、異なる記憶能力を有する2人の対戦を調べると、漸化式が複雑な連立方程式の形をとり、これを解くのは大変であると速断し、レフェリーの優れた問いかけに答えることができなかった。この事をずっと残念に思いつつ、週7コマを越える前期授業を担当し終えた後、元々の問題のみならず、類似の連立方程式にアタックして得られた成果が、この続編の実質をなしている。また、この論文へのレフェリーからのコメントを受け、戦略ⅠとⅡに基づく最適戦略を次の論文Ⅲとして考察する予定である。その際、記憶に関する条件と種々の戦略とを組み合わせて、上記最適戦略と比較した結果（期待値レベルでの不利さの度合いを示すもの）をまとめるつもりである。

著者の拙論［1］およびこの論文を精読して、貴重な意見を寄せるとともに、真の問題点を指摘して下さったレフェリーに、心から感謝申しあげる次第である。

§2.　記憶に関して互いに異なる条件下の2人が対戦するとどうなるか

めくられたカードはすべて記憶するA，直前にめくられたカード1枚だけを記憶できるB，そして何も記憶しないC，これら3者から、甲（先手番）と乙（後手番）を選び、M組のカードを用いた神経衰弱を行う。ある局面で、甲が手番のときに獲得できる得点をX，手番が乙に移ったとき乙の獲得できる得点をYで表すと、対をなす確率変数XとYは、それぞれゲームの進行とともに変化する局面に依存する。以下、3つのケースに分けて、AのB

および C に対する有利さ、B の C に対する有利さの度合いを、得点の期待値のレベルでそれぞれ定量的に解明するのが、この節の内容である。なお、記憶に関して同一条件下の B と B′ の対戦を注意１で論じる。これは、［１］で扱った C と C′ の対戦、および A と A′ の対戦（ただし、戦略Ⅰ同士と戦略Ⅱ同士、２通りの対戦がある）の結果を補足するものである。

ケース a：甲＝C と乙＝B の間の対戦

この場合移り行く局面表示は次のようになる。すなわち、甲にとってはすべて未知カードなので、残りの組数 $m\,(1 \leq m \leq M)$ で表され、乙にとっては既知カードの枚数を $a\,(a=0$ か $1)$ として、数の組 (m,a) で表される。確率変数 X_m と $Y_{(m,1)}, Y_{(m,0)}$ の確率分布は、次の連立の漸化式を満たす：1≦k≦m に対し、

(2-1-1) $$P(X_m = k) = \frac{1}{2m-1}\left\{P(X_{m-1} = k-1) + 2(m-1)P(Y_{(m,1)} = m-k)\right\}$$

(2-1-2) $$P(Y_{(m,1)} = k) = \frac{1}{2m-1}\left\{P(Y_{(m-1,0)} = k-1) + P(Y_{(m-1,1)} = k-1)\right.$$
$$\left. +(2m-3)P(X_m = m-k)\right\}$$

(2-1-3) $$P(Y_{(m,0)} = k) = \frac{1}{2m-1}\left\{P(Y_{(m-1,0)} = k-1) + 2(m-1)P(X_m = m-k)\right\}$$

ここで、X_m の母関数を $G_m(t) = \sum_{k=0}^{m} P(X_m = k)t^k$, $Y_{(m,a)}$ の母関数を

$H_{(m,a)}(t) = \sum_{k=0}^{m} P(Y_{(m,a)} = k)t^k$ とおくと、上式と同値な次式が従う：

(2-2-1) $$G_m(t) = \frac{1}{2m-1}\left\{tG_{m-1}(t) + 2(m-1)t^m H_{(m,1)}(\frac{1}{t})\right\}$$

(2-2-2) $$H_{(m,1)}(t) = \frac{1}{2m-1}\left\{t\left(H_{(m-1,0)}(t) + H_{(m-1,1)}(t)\right) + (2m-3)t^m G_m(\frac{1}{t})\right\}$$

(2-2-3) $$H_{(m,0)}(t) = \frac{1}{2m-1}\left\{tH_{(m-1,0)}(t) + 2(m-1)t^m G_m(\frac{1}{t})\right\}$$

$G_1(t) = H_{(1,a)}(t) = t$ に留意して、(2-2)を解けば、

(2-3-1) $$G_m(t) = \frac{1}{6m-5}\left\{(2m-1)tG_{m-1}(t) + 2(m-1)t^{m-1}\left(H_{(m-1,0)}\left(\frac{1}{t}\right) + H_{(m-1,1)}\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right\}$$

(2-3-2)　$H_{(m,1)}(t)=\dfrac{1}{6m-5}\left\{(2m-1)t\left(H_{(m-1,0)}(t)+H_{(m-1,1)}(t)\right)+(2m-3)t^{m-1}G_{m-1}(\dfrac{1}{t})\right\}$

(2-3-3)　$H_{(m,0)}(t)=\dfrac{1}{(6m-5)(2m-1)}\left\{(2m-1)(2m-2)t^{m-1}G_{m-1}(\dfrac{1}{t})+4(m-1)^2tH_{(m-1,1)}(t)\right.$

$$\left.+(4m^2-2m-1)tH_{(m-1,0)}(t)\right\}$$

となる。こうして、$G_m(t),H_{(m,a)}(t)$は$m=2,3,\cdots$と順次確定して行く：

$$G_2(t)=\frac{1}{7}(3t^2+4),\ H_{(2,1)}(t)=\frac{1}{7}(6t^2+1),\ H_{(2,0)}(t)=\frac{1}{7}(5t^2+2);$$

$$G_3(t)=\frac{1}{91}(15t^3+12t^2+20t+44),\ H_{(3,1)}(t)=\frac{1}{91}(55t^3+12t^2+15t+9),$$

$$H_{(3,0)}(t)=\frac{1}{455}(241t^3+80t^2+74t+60),\cdots$$

さて、期待値を解析して、B の C に対する有利さがどれほどの大きさか、明らかにしたい。このため、記憶に関して劣っている甲の立場に立って、自分の手番のときに獲得できる得点の期待値 e と相手の手番のときに獲得できる得点の期待値 f を考える。すなわち、

$$e_m=E\left[X_m\right]=G'_m(1),\ f_m(a)=E\left[m-Y_{(m,a)}\right]=m-H'_{(m,a)}(1)$$

とおいて、十分大きなmに対する数列e_mと$f_m(a)$の振舞いを調べる。

漸化式（2-3）から直ちに次式が従う：

(2-4-1)　$e_m=\dfrac{1}{6m-5}\left\{(2m-1)e_{m-1}+2(m-1)\left(f_{m-1}(0)+f_{m-1}(1)\right)\right\}+\dfrac{2m-1}{6m-5}$

(2-4-2)　$f_m(1)=\dfrac{1}{6m-5}\left\{(2m-3)e_{m-1}+(2m-1)\left(f_{m-1}(0)+f_{m-1}(1)\right)\right\}+\dfrac{2m-3}{6m-5}$

(2-4-3)　$f_m(0)=\dfrac{1}{(6m-5)(2m-1)}\left\{(2m-1)(2m-2)e_{m-1}+(4m^2-2m-1)f_{m-1}(0)\right.$

$$\left.+4(m-1)^2f_{m-1}(1)\right\}+\frac{2(m-1)}{6m-5}$$

$e_1=1,f_1(a)=0$から$e_2=\dfrac{6}{7},f_2(1)=\dfrac{2}{7},f_2(0)=\dfrac{4}{7}$が導かれ、さらに、

$e_3=\dfrac{89}{91},f_3(1)=\dfrac{69}{91},f_3(0)=\dfrac{408}{455},\cdots$と続いて行く。

定理１．(i) m≧3 のとき、次の不等式が成り立つ（対数は自然対数である）：

(2-5-1) $$\frac{m}{3}-\frac{4}{15}\log m \leqq e_m \leqq \frac{m}{3}$$

(2-5-2) $$\frac{m}{3}-\frac{4}{15}\log m \leqq f_m(a) \leqq \frac{m}{3}-\frac{1}{6m} \quad (a=0,1)$$

(ii) $\lim_{m\to\infty}\frac{e_m}{m}=\lim_{m\to\infty}\frac{f_m(a)}{m}=\frac{1}{3}$ $(a=0,1)$ を得る。

証明（ii）は(i)の直接の産物なので、(i)を数学的帰納法によって示す。

まず、m=3 のとき、(2-5-1) と (2-5-2) が正しいことは容易にわかる。$m-1$のとき (2-5-1) と (2-5-2) がともに正しいと仮定する。このとき、漸化式 (2-4) によって、

$$e_m \leqq \frac{1}{6m-5}\left\{(2m-1)\frac{m-1}{3}+4(m-1)\left(\frac{m-1}{3}-\frac{1}{6(m-1)}\right)\right\}+\frac{2m-1}{6m-5}=\frac{m}{3},$$

$$f_m(1) \leqq \frac{1}{6m-5}\left\{(2m-3)\frac{m-1}{3}+2(2m-1)\left(\frac{m-1}{3}-\frac{1}{6(m-1)}\right)\right\}+\frac{2m-3}{6m-5}$$

$$=\frac{m}{3}-\frac{1}{3(m-1)} \leqq \frac{m}{3}-\frac{1}{6m},$$

$$f_m(0) \leqq$$

$$\frac{1}{(6m-5)(2m-1)}\left\{(2m-1)(2m-2)\frac{m-1}{3}+(8m^2-10m+3)\left(\frac{m-1}{3}-\frac{1}{6(m-1)}\right)\right\}$$

$$+\frac{2(m-1)}{6m-5}=\frac{m}{3}-\frac{1}{6(m-1)} \leqq \frac{m}{3}-\frac{1}{6m}$$

を導き、上からの評価が m のときも成り立つことがわかる。

次に下からの評価に移る。(2-4) 式の右辺はいずれも、$e_{m-1}, f_{m-1}(0), f_{m-1}(1)$の凸結合と非同次項の和の形であることに留意する。そして、最も小さい非同次項をもつ $f_m(1)$を取りあげて証明すれば、残りの e_m と $f_m(0)$ についても同様の手順で楽に導かれることがわかる。よく知られた評価式 $\log(1+t) \geqq t-\frac{t^2}{2}$ $(t \geqq 0)$ を適用して

$$f_m(1) \geqq \frac{m-1}{3}-\frac{4}{15}\log(m-1)+\frac{2m-3}{6m-5}=\frac{m}{3}-\frac{4}{15}\log m+\frac{4}{15}\log\left(1+\frac{1}{m-1}\right)-\frac{4}{3(6m-5)}$$

$$\geqq \frac{m}{3}-\frac{4}{15}\log m+\frac{4}{15}\left\{\frac{1}{m-1}-\frac{1}{2(m-1)^2}\right\}-\frac{2}{9(m-1)}$$

$$=\frac{m}{3}-\frac{4}{15}\log m+\frac{2}{45(m-1)}\left(1-\frac{3}{m-1}\right) \geqq \frac{m}{3}-\frac{4}{15}\log m \quad (m=4,5,6,\cdots)$$

を得るので、mのときも下からの評価が成り立つ。こうして、不等式（2-5-1）と（2-5-2）はすべての$m \geqq 3$に対して成り立つことが示される［証明了]。

注意1.（甲＝Bと乙＝B′との対戦）

局面(m,a)において甲の獲得する得点$X_{(m,a)}$の期待値$\lambda_m(a)=E\left[X_{(m,a)}\right]$を調べる$(a=0,1)$。容易に確立できる漸化式

$$\lambda_m(1)=\frac{1}{2m-1}\left\{\lambda_{m-1}(0)+\lambda_{m-1}(1)+2+(2m-3)(m-\lambda_m(1))\right\}$$

$$\lambda_m(0)=\frac{1}{2m-1}\left\{\lambda_{m-1}(0)+1+2(m-1)(m-\lambda_m(1))\right\}$$

から、次式が従う：

(2-6-1) $$\lambda_m(1)=\frac{1}{4(m-1)}\left\{\lambda_{m-1}(0)+\lambda_{m-1}(1)+2m^2-3m+2\right\}$$

(2-6-2) $$\lambda_m(0)=\frac{1}{2(2m-1)}\left\{\lambda_{m-1}(0)-\lambda_{m-1}(1)+m(2m-1)\right\}$$

ここで、$a_m=\lambda_m(0)-\dfrac{m}{2}, b_m=\lambda_m(1)-\dfrac{m}{2}\ \left(a_1=b_1=\dfrac{1}{2}\right)$とおくと、

(2-7-1) $$a_m=\frac{1}{2(2m-1)}\left\{a_{m-1}-b_{m-1}\right\}$$

(2-7-2) $$b_m=\frac{1}{4(m-1)}\left\{a_{m-1}+b_{m-1}+1\right\}$$

と(2-6)が簡単化される。この対戦の場合、既知カードがなければ先手番が不利、既知カードがあれば反対に先手番が有利となる。すなわち、次の命題2を示すことができる。

命題2. (i) $m \geqq 3$のとき、

(2-8) $$-\frac{5}{16(m-2)(2m-1)}<a_m<0<b_m<\frac{5}{16(m-1)}$$

が成り立つ。

(ii) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m^2|a_m|=\frac{1}{16},\ \lim_{m\to\infty} mb_m=\frac{1}{4}$ を得る。

ケースb：甲＝Cと乙＝Aとの対戦

めくられたカードはすべて記憶してしまう A を対戦相手にする場合、推移する局面は3つの数の組(m,a,l)によって表示することができる。ここで、mは残っている組数、乙の既知カードのうち、aは組の一方だけわかっているカードの枚数、lは2枚とも分かっているカードの組数である$(m \geqq a+l)$。もちろん、乙の手番になれば2枚ともわかっているカードをめくって、得点lを獲得し、局面は即座に$(m-l,a,0,)$に移行する。甲の手番のとき$(0 \leqq l \leqq 1)$に獲得する得点を$X_{(m,a,l)}$、乙の手番のとき$(0 \leqq l \leqq 3)$に獲得する得点を$Y_{(m,a,l)}$と書くと、$Y_{(m,a,l)} = l + Y_{(m-l,a,0)}$となる。従って、われわれは確率変数の3つ組$\{X_{(m,a,0)}, X_{(m,a,1)}, Y_{(m,a,0)}\}$を支配する確率法則を調べることになる。

未知カードの中からランダムにカードを選んでめくるとき、未知カードと既知カード（組の一方だけ、または両方ともわかる場合の2通りに分岐する）の枚数変化の様子をそれぞれ調べて、次の連立の漸化式に至ることができる。

(2-9-1)
$$P(X_{(m,a,0)}=k)=\frac{1}{2m(2m-1)}\Big[\ 2aP(X_{(m-1,a-1,0)}=k-1)$$
$$+2(m-a)P(X_{(m-1,a,0)}=k-1)+a(a-1)P(Y_{(m,a,0)}=m-k)$$
$$+2a(a-1)P(Y_{(m-1,a-1,0)}=m-1-k)+4a(m-a)P(Y_{(m,a+1,0)}=m-k)$$
$$+a(a-1)P(Y_{(m-2,a-2,0)}=m-2-k)+4a(m-a)P(Y_{(m-1,a,0)}=m-1-k)$$
$$+4(m-a)(m-a-1)P(Y_{(m,a+2,0)}=m-k)\ \Big]$$

(2-9-2)
$$P(X_{(m,a,1)}=k)=\frac{1}{2m(2m-1)}\Big[\ 2aP(X_{(m-1,a-1,1)}=k-1)$$
$$+2P(X_{(m-1,a,0)}=k-1)+2(m-a-1)P(X_{(m-1,a,1)}=k-1)$$
$$+a(a+3)P(Y_{(m-1,a,0)}=m-1-k)+2a(a+1)P(Y_{(m-2,a-1,0)}=m-2-k)$$
$$+4(a+2)(m-a-1)P(Y_{(m-1,a+1,0)}=m-1-k)+a(a-1)P(Y_{(m-3,a-2,0)}=m-3-k)$$
$$+4a(m-a-1)P(Y_{(m-2,a,0)}=m-2-k)$$
$$+4(m-a-1)(m-a-2)P(Y_{(m-1,a+2,0)}=m-1-k)\ \Big]$$

(2-9-3)
$$P(Y_{(m,a,0)}=k)=\frac{a}{2m-a}P(Y_{(m-1,a-1,0)}=k-1)$$
$$+\frac{2(m-a)}{(2m-a)(2m-a-1)}\Big\{\ P(Y_{(m-1,a,0)}=k-1)+aP(X_{(m,a,1)}=m-k)$$
$$+2(m-a-1)P(X_{(m,a+2,0)}=m-k)\ \Big\}$$

確率分布の決まる手順はかなり複雑であり、ここでは直ちに期待値の解析に向かうこと

にしたい。$a=m-r, 0\leqq l\leqq 1 \quad (l\leqq r\leqq m)$とおいて、数列

$$E\left[X_{(m,m-r,l)}\right]=e_m(r,l),\ E\left[m-Y_{(m,m-r,0)}\right]=g_m(r)$$

の$m\to\infty$のときの漸近挙動を調べる。

さて、(2-9)式から次の連立の漸化式が導かれる：

(2-10-1)

$$e_m(r,1)=\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{(2m-1)m}\{(m-r)e_{m-1}(r,1)+(r-1)e_{m-1}(r-1,1)+e_{m-1}(r-1,0)\}$$
$$+\frac{1}{(2m-1)2m}\{\ (m-r)(m-r+3)g_{m-1}(r-1)+2(m-r)(m-r+1)g_{m-2}(r-1)$$
$$+(m-r)(m-r-1)g_{m-3}(r-1)+4(r-1)(m-r+2)g_{m-1}(r-2)$$
$$+4(r-1)(m-r)g_{m-2}(r-2)+4(r-1)(r-2)g_{m-1}(r-3)\ \}$$

(2-10-2)
$$g_m(r)=\frac{m-r}{m+r}g_{m-1}(r)+\frac{2r}{(m+r)(m+r-1)}\{g_{m-1}(r-1)+(m-r)e_m(r,1)$$
$$+2(r-1)e_m(r-2,0)\ \}$$

(2-10-3)
$$e_m(r,0)=\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{(2m-1)m}\{(m-r)e_{m-1}(r,0)+re_{m-1}(r-1,0)\}$$
$$+\frac{1}{(2m-1)2m}\{(m-r)(m-r-1)(g_m(r)+2g_{m-1}(r)+g_{m-2}(r))$$
$$+4r(m-r)(g_m(r-1)+g_{m-1}(r-1))+4r(r-1)g_m(r-2)\}$$

この漸化式によって、$r=0,1,2,\cdots$に対し、mの数列が
$g_m(r), e_m(r,0), e_m(r+1,1), g_m(r+1),\cdots$の順に帰納的に定まることがわかる。まず、

(2-11)
$$g_m(0)=0,\ e_m(0,0)=e_m(1,1)=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2j-1)}$$

は見やすい。また、$g_m(1)$は初期条件$g_1(1)=0$と漸化式

$$g_m(1)=\frac{m-1}{m+1}g_{m-1}(1)+\frac{2(m-1)}{(m+1)m}e_m(0,0)$$

によって、次の形に解かれる：$m\geqq 2$のとき、

(2-12)
$$g_m(1)=\frac{2}{(m+1)m}\sum_{j=2}^{m}(j-1)\,e_j(0,0)$$

次に　$e_m(1,0)$を求める手順に移る。$e_m(1,0)$が満たす漸化式は、

$$e_m(1,0)=\frac{m-1}{(2m-1)m}e_{m-1}(1,0)+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{(2m-1)m}e_{m-1}(0,0)$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)}{(2m-1)2m}\{g_m(1)+2g_{m-1}(1)+g_{m-2}(1)\}$$

であり、$(2m-1)!!m\, e_m(1,0)=x_m(x_1=1)$とおいて、(2-12)式を用いると、

$$x_m-x_{m-1}=(2m-3)!!\left\{m+\frac{(m-1)^2(m-2)}{(m+1)m}e_m(0,0)+\left(1+\frac{(m-2)^2(3m+1)}{(m+1)m}\right)e_{m-1}(0,0)\right.$$
$$\left.+\left(4-\frac{2(4m+1)}{m(m+1)}\right)\sum_{j=2}^{m-2}(j-1)e_j(0,0)\right\}$$

と書き直される。右辺は(2-11)の既知数列$\{e_j(0,0);j\leqq m\}$で表され、簡単のために

$(2m-3)!!c_m$とおくと、$x_m=1+\sum_{j=2}^{m}(2j-3)!!c_j$, すなわち

(2-13) $$e_m(1,0)=\frac{1}{(2m-1)!!m}+\frac{1}{m}\sum_{j=2}^{m}\frac{c_j}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2j-1)}$$

に到達する。$e_m(2,1)$についても同様のやり方で、$r=2$の場合の漸化式(2-10-1)を解くことができる。

さて、$r\geqq 1$は固定して、3つの数列$g_m(r), e_m(r,0), e_m(r+1,1)$の$m\to\infty$のときの漸近挙動を分析しよう。次の結果は、完全に記憶するAの有利さが極めて大きいことを示す。

定理3. $r\geqq 1$を固定して$m\to\infty$とするとき、次が成り立つ：

(i) $$g_m(r)=\frac{r}{m}+O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$$

(ii) $$e_m(r,0)=\left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{m}+O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$$

(iii) $$e_m(r+1,1)=\left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{m}+O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$$

証明　rに関する数学的帰納法によって証明する。まず、

$$e_m(0,0)=e_m(1,1)=\frac{1}{2m-1}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

に注意する。これを(2-12)に適用すれば容易に、

$$g_m(1)=\frac{1}{(m+1)m}\sum_{j=2}^{m}\left\{1+O\left(\frac{1}{j}\right)\right\}=\frac{1}{m}+O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$$

を導くことができる。また、(2-13)式の c_j は $c_m=3m+O(\log m)$ を満たすので、$e_m(1,0)=\dfrac{3}{2m-1}+O\left(\dfrac{\log m}{m^2}\right)$を得る。$e_m(2,1)$についても同様の結果を得て、$r=1$の場合に(i) (ii) (iii) がいずれも正しいことがわかる。

$r\geqq 2$に対しては、$1\leqq k\leqq r-1$のときの$g_m(k), e_m(k,0)$および$e_m(k+1,1)$に関する主張(i) (ii) (iii)がすべて正しいと仮定して、$k=r$の場合も成り立つことを示す。最初に(2-10-2)を満たす$g_m(r)$に取り組む。$y_m=\prod_{j=1}^{2r}(m+r+1-j)\,g_m(r)$とおくと、

$$\begin{aligned}y_m-y_{m-1}&=2r\prod_{j=1}^{2(r-1)}(m+r-1-j)\left\{\frac{r-1}{m-1}+(m-r)(r-\frac{1}{2})\frac{1}{m}\right.\\&\qquad\left.+2(r-1)(r-\frac{3}{2})\frac{1}{m}+O\left(\frac{\log m}{m}\right)\right\}\\&=r(2r-1)\prod_{j=1}^{2(r-1)}(m+r-1-j)+O(m^{2r-3}\log m)\end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned}y_m&=y_r+r(2r-1)\sum_{i=r+1}^{m}\prod_{j=1}^{2(r-1)}(i+r-1-j)+O\left(\sum_{i=r+1}^{m}i^{2r-3}\log i\right)\\&=r\prod_{j=1}^{2r-1}(m+r-j)+O(m^{2r-2}\log m)\end{aligned}$$

すなわち、

$$g_m(r)=\frac{r}{m+r}+O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$$

となり、(i)が$k=r$のときも成り立つ。

次に、(2-10-3)を満たす$e_m(r,0)$を評価する。(2-10-3)の右辺は

$\dfrac{m-r}{(2m-1)m}e_{m-1}(r,0)+(r+\dfrac{1}{2})m+O\left(\dfrac{\log m}{m^2}\right)$と書ける。

$(2m-1)!!\prod_{j=1}^{r}(m+1-j)e_m(r,0)=z_m$とおけば、

$$z_m - z_{m-1} = (2m-3)!!(2r+1)\prod_{j=1}^{r}(m+1-j) + (2m-1)!!O(m^{r-2}\log m)$$

となり、

$$z_m = z_r + \sum_{i=r+1}^{m}(2i-3)!!(2r+1)\prod_{j=1}^{r}(i+1-j) + \sum_{i=r+1}^{m}(2i-1)!!O(i^{r-2}\log i)$$

を経由して、次の(ii)と同値の結果に至る：

$$e_m(r,0) = \frac{2r+1}{2m-1} + O\left(\frac{\log m}{m^2}\right)$$

$e_m(r+1,1)$については、$e_m(r,0)$とほぼ同じ筋道をたどって、(iii)の結果を示すことができる。こうして、数学的帰納法の証明が完結する［証明了］。

ケースｃ： 甲＝Bと乙＝Aとの対戦

ゲームの進行とともに変化する局面は、乙にとってはケース b と同じ数の組(m,a,l)によって、甲にとってはもう１つパラメータを追加して(m,a,l,ε)によって表示される。追加されるεは、甲の暗記できるカード１枚を指定するためのものである。すなわち、$\varepsilon=1$は、$a \geqq 1$として a 枚の乙の既知カードのうちのどれか１枚を、$\varepsilon=2$は、$l=1$として乙の既知カードである１組のカードのうちの一方を、手番の甲が暗記していることを示す。なお、$\varepsilon=0$は、甲の暗記カードが無いことを示す。

甲の得点$X_{(m,a,l,\varepsilon)}$および乙の得点$Y_{(m,a,l)}$ $(Y_{(m,a,l)} = l + Y_{(m-l,a,0)})$を支配する確率法則を、ケース b の場合と同様の考え方で、次の連立漸化式によって記述する：

(2-14-1)
$$\begin{aligned}
P(X_{(m,a,0,1)}=k) &= \frac{1}{2m-1}P(X_{(m-1,a-1,0,0)}=k-1) \\
&+\frac{a-1}{(2m-1)(2m-2)}\Big[2P(X_{(m-1,a-1,0,1)}=k-1)+(a-2)\Big\{P(Y_{(m,a,0)}=m-k) \\
&+P(Y_{(m,a-1,1)}=m-k)\Big\}+(a-1)\Big\{P(Y_{(m,a-1,1)}=m-k)+P(Y_{(m,a-2,2)}=m-k)\Big\} \\
&+2(m-a)\Big\{P(Y_{(m,a+1,0)}=m-k)+P(Y_{(m,a,1)}=m-k)\Big\}\Big] \\
&+\frac{2(m-a)}{(2m-1)(2m-2)}\Big[P(X_{(m-1,a,0,1)}=k-1)+(a-1)P(Y_{(m,a+1,0)}=m-k) \\
&+aP(Y_{(m,a,1)}=m-k)+2(m-a-1)P(Y_{(m,a+2,0)}=m-k)\Big]
\end{aligned}$$

(2-14-2) $$P(X_{(m,a,0,0)}=k)=\frac{a}{2m(2m-1)}\Big[2P(X_{(m-1,a-1,0,0)}=k-1)$$

$$+(a-1)\left\{P(Y_{(m,a,0)}=m-k)+2P(Y_{(m,a-1,1)}=m-k)+P(Y_{(m,a-2,2)}=m-k)\right\}$$

$$+2(m-a)\left\{P(Y_{(m,a+1,0)}=m-k)+P(Y_{(m,a,1)}=m-k)\right\}\Big]$$

$$+\frac{m-a}{m(2m-1)}\Big[P(X_{(m-1,a,0,0)}=k-1)+a\left\{P(Y_{(m,a+1,0)}=m-k)\right.$$

$$\left.+P(Y_{(m,a,1)}=m-k)\right\}+2(m-a-1)P(Y_{(m,a+2,0)}=m-k)\Big]$$

(2-14-3) $$P(X_{(m,a,1,2)}=k)=\frac{1}{2m-1}P(X_{(m-1,a,0,0)}=k-1)$$

$$+\frac{a}{(2m-1)(2m-2)}\Big[2P(X_{(m-1,a-1,1,2)}=k-1)+a\left\{P(Y_{(m,a,1)}=m-k)\right.$$

$$\left.+P(Y_{(m,a-1,2)}=m-k)\right\}+(a-1)\left\{P(Y_{(m,a-1,2)}=m-k)+P(Y_{(m,a-2,3)}=m-k)\right\}$$

$$+2(m-a-1)\left\{P(Y_{(m,a+1,1)}=m-k)+P(Y_{(m,a,2)}=m-k)\right\}\Big]$$

$$+\frac{2(m-a-1)}{(2m-1)(2m-2)}\Big[P(X_{(m-1,a,1,2)}=k-1)+(a+1)P(Y_{(m,a+1,1)}=m-k)$$

$$+aP(Y_{(m,a,2)}=m-k)+2(m-a-2)P(Y_{(m,a+2,1)}=m-k)\Big]$$

(2-14-4) $$P(Y_{(m,a,0)}=k)=\frac{a}{2m-a}P(Y_{(m-1,a-1,0)}=k-1)$$

$$+\frac{2(m-a)}{(2m-a)(2m-a-1)}\left\{P(Y_{m-1,a,0)}=k-1)+aP(X_{(m,a,1,2)}=m-k)\right.$$

$$\left.+2(m-a-1)P(X_{(m,a+2,0,1)}=m-k)\right\}$$

さて、$a=m-r$とおいて、期待値$E\left[X_{(m,m-r,l,\varepsilon)}\right]=e_m(r,l,\varepsilon)$および

$E\left[m-Y_{(m,m-r,0)}\right]=h_m(r)$の解析を、ケースbと類似の筋道をたどって実行できる。

(2-15-1)

$$e_m(r,1,2)=\frac{1}{2m-1}e_{m-1}(r-1,0,0)+\frac{2}{2m-1}+\frac{m-r}{(2m-1)(2m-2)}\left[2e_{m-1}(r,1,2)\right.$$
$$+(m-r)h_{m-1}(r-1)+(2m-2r-1)h_{m-2}(r-1)+(m-r-1)h_{m-3}(r-1)$$
$$\left.+2(r-1)\{h_{m-1}(r-2)+h_{m-2}(r-2)\}\right]$$
$$+\frac{2(r-1)}{(2m-1)(2m-2)}\left[e_{m-1}(r-1,1,2)+(m-r+1)h_{m-1}(r-2)\right.$$
$$\left.+(m-r)h_{m-2}(r-2)+2(r-2)h_{m-1}(r-3)\right]$$

(2-15-2) $$h_m(r)=\frac{m-r}{m+r}h_{m-1}(r)+\frac{2r}{(m+r)(m+r-1)}\{h_{m-1}(r-1)+(m-r)e_m(r,1,2)$$
$$+2(r-1)e_m(r-2,0,1)\}$$

(2-15-3) $$e_m(r,0,0)=\frac{1}{2m-1}+\frac{m-r}{2m(2m-1)}\left[2e_{m-1}(r,0,0)\right.$$
$$\left.+(m-r-1)\{h_m(r)+2h_{m-1}(r)+h_{m-2}(r)\}+2r\{h_m(r-1)+h_{m-1}(r-1)\}\right]$$
$$+\frac{r}{m(2m-1)}\left[e_{m-1}(r-1,0,0)+(m-r)\{h_m(r-1)+h_{m-1}(r-1)\}\right.$$
$$\left.+2(r-1)h_m(r-2)\right]$$

(2-15-4) $$e_m(r,0,1)=\frac{2}{2m-1}+\frac{1}{2m-1}e_{m-1}(r,0,0)+\frac{m-r-1}{(2m-1)(2m-2)}\left[2e_{m-1}(r,0,1)\right.$$
$$+(m-r-2)h_m(r)+(2m-2r-3)h_{m-1}(r)+(m-r-1)h_{m-2}(r)$$
$$\left.+2r\{h_m(r-1)+h_{m-1}(r-1)\}\right]+\frac{r}{(2m-1)(m-1)}\left[e_{m-1}(r-1,0,1)\right.$$
$$\left.+(m-r-1)h_m(r-1)+(m-r)h_{m-1}(r-1)+2(r-1)h_m(r-2)\right]$$

この漸化式によって、$h_m(0)=0,\ e_m(0,0,0)=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2j-1)}$,

$$e_m(0,0,1)=e_m(1,1,2)=\sum_{j=2}^{m}\frac{m+2-j}{(2m-1)(2m-3)\cdots(2j-1)}+\frac{m}{(2m-1)!!},$$

そして　$h_m(1)=\dfrac{2}{(m+1)m}\sum_{j=2}^{m}(j-1)e_j(1,1,2)=\dfrac{2}{m}+O\left(\dfrac{\log m}{m^2}\right),\cdots$

という風に、m の数列が $h_m(r),e_m(r,0,0),e_m(r,0,1),e_m(r+1,1,2),h_m(r+1)$ の順序で帰納的に定まる。

完全記憶 A の B に対する優位さは、定理３と類似の形をとる。

定理４．　$r\geqq 1$ を固定して、$m\to\infty$ とするとき、次が成り立つ：

(i)　$h_m(r)=\dfrac{2r}{m}+O\left(\dfrac{\log m}{m^2}\right)$

(ii)　$e_m(r,0,0)=\left(2r+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{m}+O\left(\dfrac{\log m}{m^2}\right)$

(iii)　$e_m(r,0,1)=(2r+1)\dfrac{1}{m}+O\left(\dfrac{\log m}{m^2}\right)$

(iv)　$e_m(r+1,1,2)=(2r+1)\dfrac{1}{m}+O\left(\dfrac{\log m}{m^2}\right)$

証明は、定理３の証明と同様であり、ここでは省略する。

§3.　完全記憶の両者が互いに異なる戦略をとるとどうなるか

この節では、完全記憶の仮定の下での２つの純粋戦略ⅠとⅡ（[1] 参照）を取り上げる。そして甲は戦略Ⅰ、乙は戦略Ⅱを採用して神経衰弱を行うとき、それぞれの得点の期待値がどうなるか、というわれわれの主要テーマを考究する。そして、戦略Ⅰ同士および戦略Ⅱ同士の対戦における先手番の期待値 $\mu(m,m-r)$（[1] の定理 1 参照）、および $\nu(m,m-r)$（[1] の定理 2 参照）と比較しつつ、戦略ⅠとⅡの対戦に関しても興味深い結果（定理5）を提示する。

完全記憶の両者の対戦では、２枚とも既知である l 組のカードは即座に取り除かれることから、局面を数の組 (m,a) によって表示する。甲が手番のとき獲得する得点は $X_{(m,a)}$、乙が手番のとき獲得する得点は $Y_{(m,a)}$ で表すと、確率変数の対 $X_{(m,a)}$ と $Y_{(m,a)}$ の確率分布は、次の漸化式を満たすことがわかる（初期条件 $X_{(1,a)}=Y_{(1,a)}=1$ と境界条件 $X_{(m,m)}=Y_{(m,m)}=m$ に留意せよ）：

$$P(X_{(m,a)}=k)=\frac{a}{2m-a}P(X_{(m-1,a-1)}=k-1)+\frac{2(m-a)}{(2m-a)(2m-a-1)}\times\{T\},\quad(3\text{-}1\text{-}1)$$

$$T=P(X_{(m-1,a)}=k-1)+aP(Y_{(m-1,a)}=m-1-k)$$

$$+2(m-a-1)P(Y_{(m,a+2)}=m-k) \quad (0\leqq a\leqq m)$$

(3-1-2) $$P(Y_{(m,a)}=k)=\frac{a}{2m-a}P(Y_{(m-1,a-1)}=k-1)+\frac{2(m-a)}{2m-a}P(X_{(m,a+1)}=m-k)$$
$$(m\geqq 3,\quad 1\leqq a\leqq m-2)$$

(3-1-2') $$P(Y_{(m,0)}=k)=\frac{1}{2m-1}P(Y_{(m-1,0)}=k-1)+\frac{2(m-1)}{2m-1}P(X_{(m,2)}=m-k)$$

(3-1-2") $$P(Y_{(m,m-1)}=k)=\frac{m-1}{m+1}P(Y_{(m-1,m-2)}=k-1)+\frac{2}{(m+1)m}\left\{\delta_{k,m}+(m-1)\delta_{k,0}\right\}$$

期待値 $\mu_1(m,a)=E\left[X_{(m,a)}\right]$ および $\nu_2(m,a)=E\left[Y_{(m,a)}\right]$, そして $a=m-r$として

［1］の解 $\mu(m,m-r)$ および $\nu(m,m-r)$との差

(3-2-1) $$d_1(m,m-r)=\mu_1(m,m-r)-\mu(m,m-r)$$

(3-2-2) $$d_2(m,m-r)=\nu_2(m,m-r)-\nu(m,m-r)$$

をそれぞれ考察する。戦略Ⅰをとる甲の手番において、相手の乙が戦略Ⅰから戦略Ⅱに、戦術を変更したときの得点差の期待値が d_1 であり、戦略Ⅱをとる乙の手番において、相手の甲が戦略Ⅱから戦略Ⅰに、戦術を変更したときの得点差の期待値が d_2 に他ならない。

記法の簡単化のため、$\rho(m,m-r)=\nu(m,m-r)-\mu(m,m-r)$ と書くと、［1］の定理1、定理2から次式が従う：

$$\rho(m,m)=\rho(m,m-1)=0,\ \rho(m,m-2)=\frac{7(m-2)}{3(m+2)},$$

そして一般の $r\geqq 3$ に対し、

$$\rho(m,m-r)=\frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots(m+r)}\sum_{k=1}^{r}(\gamma_{r,k}-\beta_{r,k})m^{r-k}$$
$$+\frac{(2r)!\ \omega_r(m)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}$$

なお、係数 $\beta_{r,k}$ と $\gamma_{r,k}$ そして m の $2(r-3)$ 次の多項式 $\omega_r(m)$ はすべて［1］で与えられたものである。

さて、2重数列 $\mu_1(m,a),\ \nu_2(m,a)$ および $d_1(m,m-r),\ d_2(m,m-r)$ を支配する連立の漸化式は、容易に(3-1)から導かれる：

(3-3-1) $$\mu_1(m,a)=\frac{a}{2m-a}\left\{1+\mu_1(m-1,a-1)\right\}+\frac{2(m-a)}{(2m-a)(2m-a-1)}\times\left\{T'\right\},$$
$$T'=1+\mu_1(m-1,a)+a\left\{m-1-\nu_2(m-1,a)\right\}+2(m-a-1)\left\{m-\nu_2(m,a+2)\right\}$$
$$(0\leqq a\leqq m)$$

(3-3-2) $$\nu_2(m,a)=\frac{a}{2m-a}\{1+\nu_2(m-1,a-1)\}+\frac{2(m-a)}{2m-a}\{m-\mu_1(m,a+1)\}$$
$$(1\leqq a\leqq m-2)$$

(3-3-2') $$\nu_2(m,0)=\frac{1}{2m-1}\{1+\nu_2(m-1,0)\}+\frac{2(m-1)}{2m-1}\{m-\mu_1(m,2)\}$$

(3-3-2") $$\nu_2(m,m-1)=\frac{m-1}{m+1}\nu_2(m-1,m-2)+1$$

(3-4-1) $$d_1(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}d_1(m-1,m-1-r)+\frac{2r}{(m+r)(m+r-1)}\times\{T''\},$$
$$T''=d_1(m-1,m-r)-(m-r)\{d_2(m-1,m-r)+\rho(m-1,m-r)\}$$
$$-2(r-1)\{d_2(m,m-r+2)+\rho(m,m-r+2)\}\quad(3\leqq r\leqq m)$$

(3-4-2) $$d_2(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}d_2(m-1,m-1-r)$$
$$-\frac{2r}{m+r}\{d_1(m,m-r+1)-\rho(m,m-r+1)\}\qquad(3\leqq r\leqq m-1)$$

(3-4-2') $$d_2(m,0)=\frac{1}{2m-1}d_2(m-1,0)-\frac{2(m-1)}{2m-1}\{d_1(m,2)-\rho(m,2)\}$$

(3-4-2") $$d_i(m,m)=d_i(m,m-1)=d_i(m,m-2)=0\qquad(i=1,2)$$

$r\leqq 2$の局面では、手番が相手に移行するや否や、戦略ⅠとⅡの違いが消滅してしまう事実の帰結が(3-4-2")である。

$r=3$のとき、$d_i(m,m-3)$がどのような形に表されるか、この問題を解くことから始める。(3-4)式において$r=3$として、整理すると、

(3-5-1) $$d_1(m,m-3)=\frac{m-3}{m+3}d_1(m-1,m-4)-\frac{14(m-3)^2}{(m+3)(m+2)(m+1)}\qquad(m\geqq 3)$$

(3-5-2) $$d_2(m,m-3)=\frac{m-3}{m+3}d_2(m-1,m-4)+\frac{14(m-2)}{(m+3)(m+2)}\qquad(m\geqq 4)$$

(3-5-2') $$d_2(3,0)=0$$

となる。そして、$x_m(i)=(m+3)(m+2)\cdots(m-2)d_i(m,m-3)$とおけば、

$$x_m(i)-x_{m-1}(i)=\begin{cases}-14m(m-1)(m-2)(m-3)^2 & (i=1)\\ 14(m+1)m(m-1)(m-2)^2 & (i=2)\end{cases}$$

と計算できる。こうして、$x_3(i)=0$に留意して、

$$x_m(1) = -14\sum_{j=4}^{m}\{(j+1)j\cdots(j-3) - 4j(j-1)\cdots(j-3)\}$$
$$= -14\left\{\frac{(m+2)(m+1)\cdots(m-3)}{6} - \frac{4(m+1)m\cdots(m-3)}{5}\right\}$$

に至る。同様に、

$$x_m(2) = 14\left\{\frac{(m+2)(m+1)\cdots(m-3)}{6} - \frac{(m+2)(m+1)\cdots(m-2)}{5} - 4!\right\}$$

と計算できる。すなわち、次の等式が示される：

(3-6-1) $$d_1(m,m-3) = -\frac{7(m-3)}{3(m+3)} + \frac{56(m-3)}{5(m+3)(m+2)} = -\frac{7(m-3)(5m-14)}{15(m+3)(m+2)}$$

(3-6-2) $$d_2(m,m-3) = \frac{7(m-3)}{3(m+3)} + \frac{14}{5(m+3)} - \frac{14\times 4!}{(m+3)(m+2)\cdots(m-2)}$$

この直接の産物として、次の極限値が従う：

(3-6-3) $$\lim_{m\to\infty} d_i(m,m-3) = \frac{7}{3}(-1)^i \qquad (i=1,2)$$

一般の $r \geqq 4$ の場合には、m の数列 $d_i(m,m-r) \quad (i=1,2)$ の漸近挙動が次の定理の形にまとめられる。

<u>定理 5</u>　$r \geqq 3$のとき、次の (i) ～ (iv) が成り立つ。

(i)

(3-7-1)

$$d_1(m,m-r) = \kappa_r\frac{(m-r)(m-r-1)\cdots(m-2r+3)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m+3)} + \frac{\omega_{1,r}(m)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}$$

(3-7-2)

$$d_2(m,m-r) = -\kappa_r\frac{(m-r)(m-r-1)\cdots(m-2r+3)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m+3)} + \frac{\omega_{2,r}(m)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}$$

ここでκ_rは、初期値$\kappa_2 = 0$として、次の漸化式で規定される r の数列である：

(3-8) $$\kappa_r = \kappa_{r-1} + \beta_{r-1,1} - \gamma_{r-1,1} \qquad (r \geqq 3)$$

さらに、$\omega_{i,r}(m) \quad (i=1,2)$ は m の $(2r-1)$ 次の多項式であり、<u>証明</u>の中で述べる手順(3-10)式によって帰納的に定まる。

(ii) $$\lim_{m\to\infty} d_i(m,m-r) = \kappa_r(-1)^{i-1} \qquad (i=1,2)$$

(iii) $\kappa_{2l}(l=2,3,\cdots)$ は狭義単調増加の正数列で、$+\infty$に発散する。

(iv)　$\kappa_{2l-1}(l=2,3,\cdots)$は狭義単調減少の負数列をなす。

定理５と［１］の結果によって、$\mu_1(m,m-r)$と$\nu_2(m,m-r)$の両者五分五分の場合の得点$\dfrac{m}{2}$からの偏差は、次のような漸近挙動をもつ。

<u>系６.</u>　$r \geqq 2$を固定して$m \to \infty$とするとき、次式が成り立つ。

(3-9-1)　$$\mu_1(m,m-r)-\frac{m}{2}=\left(\alpha_r-\frac{1}{2}\right)m+\beta_{r,1}-\frac{(r+2)(r-1)}{2}\alpha_r+\kappa_r+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

(3-9-2)　$$\nu_2(m,m-r)-\frac{m}{2}=\left(\alpha_r-\frac{1}{2}\right)m+\gamma_{r,1}-\frac{(r+2)(r-1)}{2}\alpha_r-\kappa_r+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

<u>定理５の証明.</u>　(i)数学的帰納法によって、(3-7-1)のみを証明する。(3-7-2)の場合も同様であり、ここでは省くことにする。

まず$r=3$のとき正しいことは、$\kappa_3=-\dfrac{7}{3}, \omega_{1,3}(m)=\dfrac{56}{5}(m+1)m\cdots(m-3)$とすれば(3-6-1)式に一致することからわかる。$r-1$まで(3-7)式が<u>両方</u>とも成り立つと仮定して、rのときも(3-7-1)が成り立つことを示す。以下簡単のため、$\beta_{r,1}=\beta_r, \gamma_{r,1}=\gamma_r$と書くことにする。

$$y_m=(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)d_1(m,m-r)\quad \left(y_r=(2r)!d_1(r,0)\right)$$

とおく。漸化式(3-4-1)において、帰納法の仮定をすべて使って計算すると、次式を見出す：

$$y_m-y_{m-1}=(\kappa_{r-1}+\beta_{r-1}-\gamma_{r-1})\,2r(m+1)m\cdots(m-2r+3)+2rL_r(m)$$

ここでmの$2(r-1)$次の多項式$L_r(m)$は、次の形に表される：

(3-10-1)

$$L_r(m)=(r-2)\kappa_{r-1}(m+1)m\cdots(m-2r+4)+2(r-1)\kappa_{r-2}(m+2)(m+1)\cdots(m-2r+7)$$

$$+(\beta_{r-1}-\gamma_{r-1})m(m-1)\cdots(m-r)\left\{(m-1)^{r-2}-(m+1)(m-r-1)(m-r-2)\cdots(m-2r+3)\right\}$$

$$+\sum_{k=2}^{r-1}(\beta_{r-1,k}-\gamma_{r-1,k})(m-1)^{r-1-k}m(m-1)\cdots(m-r)$$

$$+2(r-1)\sum_{k=1}^{r-2}(\beta_{r-2,k}-\gamma_{r-2,k})m^{r-2-k}(m+1)m\cdots(m-r+1)$$

$$+\omega_{1,r-1}(m-1)-(m-r)\left\{\omega_{2,r-1}(m-1)+(2r-2)!\,\omega_{r-1}(m-1)\right\}$$

$$-2(r-1)(m-r+2)(m-r+1)\left\{\omega_{2,r-2}(m)+(2r-4)!\,\omega_{r-2}(m)\right\}$$

従って、

$$y_m = y_r + (\kappa_{r-1} + \beta_{r-1} - \gamma_{r-1})(m+2)(m+1)\cdots(m-2r+3) + 2r\sum_{j=r+1}^{m} L_r(j)$$

すなわち、次式に到達する。

$$d_1(m,m-r) = (\kappa_{r-1} + \beta_{r-1} - \gamma_{r-1})\frac{(m-r)(m-r-1)\cdots(m-2r+3)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m+3)}$$

$$+\frac{2r\sum_{j=r+1}^{m} L_r(j) + (2r)!d_1(r,0)}{(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)}$$

こうして、(3-8)の漸化式でκ_rを規定し、

$$\text{(3-10-2)} \quad \omega_{1,r}(m) = 2r\sum_{j=r+1}^{m} L_r(j) + (2r)!d_1(r,0)$$

とおけば、rのときも(3-7-1)が正しいことが示される。

定理5(ii)は(i)から直ちに導かれる。(iii)と(iv)の証明に入る前に、等式（3つの数列$\alpha_r,\beta_r,\gamma_r$がそれぞれ満たす漸化式（[1]）を用いて示される）

$$\text{(3-11)} \quad \beta_r - \gamma_r + \beta_{r-1} - \gamma_{r-1} = 2r - 1 - \frac{8r(r-1)}{2r-1}\alpha_{r-2}$$

に注意する。この等式から、漸化式(3-8)によって次式が容易に従う：

$$\text{(3-12)} \quad \kappa_r = \kappa_{r-2} + 2r - 3 - \frac{8(r-1)(r-2)}{2r-3}\alpha_{r-3}$$

上式において、$r = 2l$として$\alpha_{2l-3} < \frac{1}{2}$を適用すれば、

$$\kappa_{2l} > \kappa_{2l-2} + 4l - 3 - \frac{4(2l-1)(2l-2)}{4l-3} = \kappa_{2l-2} + \frac{1}{4l-3} > \kappa_{2l-2} \quad (l \geqq 2)$$

従って、$\kappa_{2l}(\kappa_2 = 0)$は単調増加数列をなし、

$$\kappa_{2l} = \sum_{j=2}^{l}(\kappa_{2j} - \kappa_{2j-2}) > \sum_{j=2}^{l}\frac{1}{4j-3} \to +\infty \quad (l \to \infty\text{のとき})$$

を考慮すれば、(iii)の主張が証明される。

他方、(3-12)において、$r = 2l+1$として$\alpha_{2l} > \frac{1}{2}$を適用すれば、

$$\kappa_{2l-1}-\kappa_{2l+1}=\frac{16l(2l-1)}{4l-1}\alpha_{2l-2}-(4l-1)=2(4l+1)(\alpha_{2l}-\frac{1}{2})>0$$

を得、(iv) $\kappa_{2l-1}\left(\kappa_3=-\frac{7}{3}\right)$ が単調減少の負数列をなすことがわかる［証明了］。

注意2．対戦相手が2つの戦略、ⅠとⅡの間で戦術変更を行う場合、手番の者の有利・不利の度合いが、r の偶奇によって交互に入れ代わる様子を示すのが定理5の内容である。特に κ_r の符号は、系6の(3-9)式の主要項 $\left(\alpha_r-\frac{1}{2}\right)m$ と同符号である。なお、(3-9)式の次の定数項 β_r と γ_r を比較して、次の簡単な評価式を書き加えたい：

(3-13-1) $$\beta_{2l}-\gamma_{2l}<-\left\{\frac{7}{3}+2\sum_{j=2}^{l}\frac{1}{(4j-1)(4j-3)}\right\}\quad (l\geqq 2;\beta_2-\gamma_2=-\frac{7}{3})$$

(3-13-2) $$\beta_{2l+1}-\gamma_{2l+1}>\frac{7}{3}+\frac{1}{4l+1}+2\sum_{j=2}^{l}\frac{1}{(4j-1)(4j-3)}\quad (l\geqq 1)$$

最後に、定理5(iv)の(iii)と比べると不十分な主張に関して、未解決問題を述べたい。

(3-14) $$\kappa_{2l+1}=\kappa_1-\sum_{j=1}^{l}(\kappa_{2j-1}-\kappa_{2j+1})=-2\sum_{j=1}^{l}(4j+1)(\alpha_{2j}-\frac{1}{2})$$

という数列 κ_{2l+1} の表現式において、$\alpha_{2j}-\frac{1}{2}$ は狭義単調減少の正数列をなす。しかしながら、正項級数 $\sum_{j=1}^{\infty}(4j+1)(\alpha_{2j}-\frac{1}{2})$ は発散、あるいは有限値に収束、どちらになるのか。この結論を著者の力量不足のため、出すことができない。

本誌前号の論文［1］に引き続いて、清書の労をとっていただいた鴨藤江利子さんに、感謝の言葉を一言申し述べて、筆を置くことにする。

参考文献

［1］野田明男、カード・ゲームの数理ノート；「神経衰弱」における戦略について，浜松医科大学紀要一般教育 15:1-18,2001.

［2］R.L.Graham,D.E.Knuth and O.Patashnik, Concrete Mathematics (A Foundation for Computer Science), Addison-Wesley,1988.