A Mathematical Note of Card Games ,III; on Optimal Strategies in the Concentration Game

A Mathematical Note of Card Games , Ⅲ; on Optimal Strategies in the Concentration Game

Akio NODA

Mathematics

Abstract: This is a continuation of the author's previous papers [1] and [2], and is devoted to the study of optimal strategies arising in the card game of concentration.

Suppose that two players A and B have both perfect memory and a set of cards consisting of all twin cards is used in their concentration game. In the first paper [1], we started to investigate two basic strategies, the strategies Ⅰ and Ⅱ. Note that the changing situation of this game is characterized by a vector $(m, m-r)$, where the total number of the remaining twin cards is $2m$, and the both players keep in memory $m-r$ different cards including no twin cards. Now, the player having the move have to make a choice just before he turns up the second card. Indeed, he can select it randomly, either from the set of $m+r-1$ unknown cards or from the set of $m-r$ memorized cards for $1 \leqq m-r \leqq m-2$; the former selection forms the strategy Ⅰ and the latter does the strategy Ⅱ.

We are ready to explain our optimal strategy M. Before coming to a decision concerning the second card, the player calculate the expectation $e_1(m, m-r)$ of his points obtained if he adopts the strategy Ⅰ in the present situation $(m, m-r)$ and he also gets another expectation $e_2(m, m-r)$ based on the strategy Ⅱ. Then he prefers the one giving rise to the maximum value $\max\{e_1(m, m-r), e_2(m, m-r)\}$, which turns out to depend on the changing situation $(m, m-r)$ in a rather complicated way. Such a strategy of selecting, in every situation of his move, the optimal one in a family of basic strategies that produces the maximum value of expectation is called the strategy M.

The purpose of this paper is to give a full account of the strategy M and then to make a comparison of various strategies such as M, Ⅰ, Ⅱ and others. In order to exhibit an advantage of the strategy M over the other, we discuss several cases of the concentration game in which A constantly adopts the strategy M but B changes his strategy within the above-mentioned strategies.

On the same line as in [1] and [2], we investigate the expectation of A's points in the situation $(m, m-r)$ of his own move, and succeed in proving its asmptotic behavior of the form $\alpha_r m + \delta_r + O\left(\frac{1}{m}\right)$, where m goes to ∞ for each fixed r. The detailed study of these coefficients α_r and δ_r as sequences of $r = 1, 2, 3, \cdots$ enables us to state the following: The leading term $\alpha_r m$ is independent of B's strategy, but the constant term δ_r does depend on it; if B changes his strategy from the strategy M to any one of other non-optimal strategies, then δ_r increases. The key point in discusions that follow in sections 2 and 3 is to show that A should select the strategy Ⅰ when r is odd, and the strategy Ⅱ when r is even, <u>for sufficiently large values of m</u>. For each value of m, on the

other hand, the problem of solving the inequality $e_1(m,m-r) > e_2(m,m-r)$ seems to be difficult, which one can see by checking several tables listed in the final section 4.

Key words: optimal strategy, card game, expectation, a system of difference equations, asymptotics.

§1. 序

本誌第15号と第16号に続けて発表した著者の論文［1］と［2］の完結編として、「神経衰弱」というカード・ゲームにおける最適戦略を論じたい。数の一致が起こるカードの枚数はすべて２であるという前提の下、めくられたカードすべてを完全に記憶する２人のプレーヤーが神経衰弱を行うとする。このとき、既知カードの中に数が一致する組があれば、プレーヤーはまずそれらをめくって得点を得る。そうした後１枚目のカードは、未知カードの中からランダムに選んでめくり、既知カードの中に数が一致するカードがあることを期待する。この期待がはずれた場合、２枚目のカードの選び方には２通りの戦略が考えられる。１つは、２枚目を未知カードの中からランダムに選んでめくり、１枚目のカードと数が一致する運を当てにする戦略Ⅰである。もう１つは、この際得点は断念して、既知カードの中から何か１枚選んでめくり、既知カードがさらに１枚増えるという対戦相手に有利な状況を防止する戦略Ⅱである。

このような２つの基本戦略を念頭において、ここではもう一段階段を登るような戦略を提案し、研究する。すなわち、手番のプレーヤーはその局面において、戦略ⅠおよびⅡに基づいて獲得できる得点期待値e_1およびe_2をそれぞれ計算し、e_1とe_2を比べて大きい方の戦略を選択する。この考え方がこの種のチャンス・ゲームにおける最適戦略を構成する。こうして、複数の基本戦略のうち、推移する局面毎に見積られた得点期待値を最大にするような基本戦略をその都度選択して行く方式を、われわれは戦略Ｍ（Ｍは Maximum の略号）と名づけよう。われわれの研究目的は、最適戦略Ｍと他のいろいろな戦略（戦略Ⅰ，Ⅱの他にも局面毎に戦略ⅠとⅡをランダムに選ぶ戦略も考えられる）とを、得点期待値に着目して比較検討することに他ならない。

さて、既知カードの中に数が一致するカードの組が含まれておれば、手番の者はそれを即座にめくって得点１を得るので、移り行く局面は残りの組数mと互いに異なる数からなるところの既知カードの枚数aによって表示される。そして局面(m,a)において得点期待値の大きい方を与えるのは、戦略ⅠとⅡのどちらになるのかという問題が、ゲームを実際に行う際、事前に解決すべき事柄である。なお、aよりもむしろ$m-a=r$とおく方が、漸化式に頼るわれわれにとって好都合である。$r=0$に対応する局面に自分の手番が来れば、残りのm組すべてを獲得できるという特殊性に留意すると、上述の問題は、局面$(m,m-r)$に複雑に依存する。われわれは［1］［2］と同じアプローチ（得点期待値の漸近挙動を調べる方法）をとって、十分大きなmに対してこの問題を解決する。

なお、十分小さなm $(m \leqq 7)$に対しては計算結果を§4 の後半に表の形で提示したが、一般の有限値mの場合に何らかの規則性を見出して定理の形にまとめるのは難題であり、断念せざるを得なかった。

以下論文の内容をあらまし述べて行く。

まず、甲乙２人のプレーヤーがともに戦略Ｍを採用するケースを§2 で論じる。局面$(m, m-r)$で手番の者の得点期待値を$\varepsilon(m, m-r)$で表わすとき、$m \to \infty$のときの$\varepsilon(m, m-r)$の漸近挙動を調べる（定理2 参照）。そして［１］で論じた戦略Ｉ（およびⅡ）同士の対戦から生じる$\mu(m, m-r)$（および$\nu(m, m-r)$）を再度取りあげ、これら３つの得点期待値の間でその漸近挙動を比較する。実際、第１項の$\alpha_r m$は共通に現れるので、第2 項をなす定数項の大小を比べる（命題3 参照）。また、現論文で必要となる係数α_rの性質は補題1 で証明される。

次の§3 においては、戦略Ｍをとる甲と、他のいろいろな戦略をとる乙との対戦を取りあげ、最適戦略の有効性を検証する。すなわち、乙が戦略Ｉ（あるいはⅡ）を一貫してとるケースでは、甲が局面毎に戦略ＩとⅡのうちよりよい方を選べることから生じる優位性は、得点期待値で測った場合、果たしてどれほどの量になるか。この問いに定理4（あるいは5）で答える。さらに、乙が戦略ＩとⅡを確率$\frac{1}{2}$でランダムに選ぶ第3 のケースは、定理6 に結実する。

これら３つのケースにおいて、甲は戦略ＩとⅡのうち、どちらを選ぶべきかというゲームの鍵となる問題は、十分大きなmの値に対して、乙の戦略の如何に関わらず一定で、次のように解決される。すなわち、rが奇数ならば戦略Ｉ、rが偶数ならば戦略Ⅱを選ぶのがよい。戦略Ｉは既知カードを２枚増やして手番が相手に移る可能性が大きく、戦略Ⅱの方は１枚増やすだけで相手に移る。他方、rが偶数ならば$\alpha_r > \frac{1}{2}$なので、手番にある方が有利な局面、rが奇数ならば$\alpha_r < \frac{1}{2}$なので、手番にある方が不利な局面を意味する。従って、上に述べた甲の選択策は、手番が乙に移行する際乙が有利な局面に立つ事態をできるだけ回避しようとするやり方、という風に言い直すことができる。

最後の§4 は、［１］［２］および現論文の§3 までに得られた結果のまとめにあてられる。すなわち、取りあげられた種々の戦略を比較検証し、得点期待値のレベルでそれら戦略間の優劣の度合いを評価する。このような比較作業の重要性は、［２］のレフェリーによって指摘され、著者の宿題となっていたものである。今夏最適戦略Ｍの考察に着手し、それを常に採用する甲の立場を想定し、いろいろな戦略をとる乙と対戦すれば甲の得点期待値はどのように変化するであろうか、という形で、レフェリーの問いを調べることにした。こうして、十分大きなmの値と十分小さなmの値両方の場合に分けて、乙のとる種々の戦略を比較し、期待値の増減を評価することが可能となった次第である。鋭い指摘と有益な助言を与えて下さったレフェリーに心から感謝申しあげて、この節を閉じることにする。

§2. 戦略Ⅰ,Ⅱに基づく最適戦略（戦略M）

前節で導入した最適戦略Mを採用する者同士の対戦を論じる。著者の論文［1］［2］と同じ「神経衰弱」の設定に従い、残りのカードの組数m、既知カードの枚数$a=m-r$の局面で、手番の者の得点期待値を$\varepsilon(m,m-r)$で表す。戦略Ⅰ同士の場合の$\mu(m,m-r)$, 戦略Ⅱ同士の場合の$\nu(m,m-r)$の研究([1]の§3と§4参照)とは異なり、この節では$r(1\leqq r<\infty)$は固定して、$m\to\infty$のときの$\varepsilon(m,m-r)$の漸近挙動

(2-1) $$\varepsilon(m,m-r)=\alpha_r m+\delta_{0,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

を解明することで満足する。そして、同種の式

(2-2) $$\mu(m,m-r)=\alpha_r m+\delta_{1,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

(2-3) $$\nu(m,m-r)=\alpha_r m+\delta_{2,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

における数列$\delta_{i,r}$ $(i=0,1,2)$の大きさを互いに比べてみる。なお、上記３つの式に共通するα_rについて、新たに必要な性質を補題１としてまとめる。

さて、戦略Ｍの下では１枚目めくったカードが既知カードの数と一致しない場合、２枚目のカードを未知カードの中から選ぶやり方（戦略Ⅰ）と既知カードの中から選ぶやり方（戦略Ⅱ）とを比較計量して、局面毎に期待値の大きい方を採用する。従って、得点の期待値$\varepsilon(m,m-r)$が満たすべき漸化式は次の通り：$2\leqq r\leqq m-1$のとき、

(2-4-1) $$\varepsilon(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{\varepsilon(m-1,m-1-r)+1\}+\frac{2r}{m+r}\max\{T_1,T_2\}$$

(2-4-2) $$T_1=\frac{1}{m+r-1}\{\,1+\varepsilon(m-1,m-r)+(m-r)(m-1-\varepsilon(m-1,m-r))$$
$$+2(r-1)(m-\varepsilon(m,m-r+2))\}$$

(2-4-3) $$T_2=m-\varepsilon(m,m-r+1)$$

なお、$r=1$のときと$m=r$のときは戦略Ⅱは戦略Ⅰに帰す故、次式を導く。

(2-5-1) $$\varepsilon(m,m-1)=\frac{m+2}{3}\left(=\mu(m,m-1)=\nu(m,m-1)\right)$$

(2-6) $$\varepsilon(m,0)=\frac{1}{2m-1}\left\{2m^2-2m+1+\varepsilon(m-1,0)-2(m-1)\varepsilon(m,2)\right\}$$

漸化式(2-4)を書き直して、

(2-4-1') $$\varepsilon(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\varepsilon(m-1,m-1-r)+\frac{(2r+1)m-r}{m+r}-\frac{2r}{m+r}\min\left\{T_1',T_2'\right\}$$

(2-4-2') $$T_1' = \frac{1}{m+r-1}\{2m-r-1+(m-r-1)\varepsilon(m-1,m-r)+2(r-1)\varepsilon(m,m-r+2)\}$$

(2-4-3') $T_2' = \varepsilon(m,m-r+1)$

を得る。$\varepsilon(m,m)=m$および(2-5-1)式からスタートして、帰納的に$\varepsilon(m,m-r)$の式を導くことができる。

(2-5-2) $$\varepsilon(m,m-2)=\frac{11m^2+10m-24}{15(m+2)}(=\nu(m,m-2)\geqq\mu(m,m-2))$$

(2-5-3) $$\varepsilon(m,m-3)=\frac{13m^2+119m-180}{35(m+3)}$$

すべての$m\geqq 3$に対し、$\nu(m,m-3)\leqq\varepsilon(m,m-3)\leqq\mu(m,m-3)$が成立する。$r=4$に対しては、

(2-5-4) $$\varepsilon(m,m-4)=\frac{211m^2+72m+1232}{315(m+4)}$$

を得、$4\leqq m\leqq 7$のとき$\mu(m,m-4)>\nu(m,m-4)\geqq\varepsilon(m,m-4)$, $m=8$のとき$\varepsilon(8,4)<\mu(8,4)<\nu(8,4)$、そして$m\geqq 9$のとき$\mu(m,m-4)<\varepsilon(m,m-4)<\nu(m,m-4)$となる。３つの期待値の間の大小関係は、$m$の値によって変わることに留意する。

漸化式(2-4-1')の最終項に関しては、$r=2$のとき$T_1'\geqq T_2'$,$r=3$のとき$T_1'\leqq T_2'$, $r=4$のとき$T_1'\geqq T_2'$という風に、すべての$m\geqq r$に対して１つの不等式が示されたが、$r=5$になると、mの値によって不等式の向きが逆転することが生じ、漸化式(2-4-1')を explicit に解く仕事は、$r=5,6,\cdots$と進むにつれて困難が増大して行く。ここでは、$\underline{r=5}$の場合に解を求めよう。すなわち、

$$T_1'=\frac{211m^3-50m^2+12039m-26856}{315(m+4)(m+3)}$$

$$T_2'=\frac{211m^2+72m+1232}{315(m+4)}$$

と計算されるので、$6\leqq m\leqq 9$のとき$T_1'>T_2'$, $m\geqq 10$のとき$T_1'<T_2'$が示される。

従って、初項の$\varepsilon(5,0)=\dfrac{116}{45}$からスタートして、

（イ）$6\leqq m\leqq 9$の範囲では、漸化式

$$\varepsilon(m,m-5)=\frac{m-5}{m+5}\varepsilon(m-1,m-6)+\frac{11m-5}{m+5}-\frac{2(211m^2+72m+1232)}{63(m+5)(m+4)}$$

を解いて、解

(2-5-5) $$\varepsilon(m,m-5)=\frac{271}{693}(m-5)+\frac{1292}{315}-\frac{320}{21(m+5)}$$

を得る。新たな初期値$\varepsilon(9,4)=\dfrac{12336}{2695}$に基づいて、（ロ）$m\geqq 10$の範囲では、漸化式

$$\varepsilon(m,m-5)=\frac{m-5}{m+5}\varepsilon(m-1,m-6)+\frac{11m-5}{m+5}-\frac{2(211m^3-50m^2+12039m-26856)}{63(m+5)(m+4)(m+3)}$$

が次の形の解をわれわれに恵む：

(2-5-5') $$\varepsilon(m,m-5)=\frac{271}{693}(m-5)+\frac{2047}{315}-\frac{1496}{21(m+5)}+\frac{1920}{7(m+5)(m+4)}$$
$$+\frac{551}{5733}\cdot\frac{14\cdot 13\cdots\cdots 5}{(m+5)(m+4)\cdots(m-4)}$$

次に、この節のテーマである$m\to\infty$のときの漸近挙動を調べよう。このため、次の補題を準備する。

<u>補題1.</u> (ｉ) $\alpha_{2j}>\frac{1}{2}\cdot\frac{4j+3}{4j+1}$ および $\alpha_{2j+1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{4j+5}{4j+7}$ $(j=1,2,3,\cdots)$

(ⅱ) 次式が成り立つ

(2-7-1) $$\alpha_{2j}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\sum_{l=1}^{j}\frac{(4l-3)!!}{(4l)!!}\right\}\frac{(4j)!!}{(4j+1)!!}$$

(2-7-2) $$\alpha_{2j+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left\{1+2\sum_{l=1}^{j}\frac{(4l-1)!!}{(4l+2)!!}\right\}\frac{(4j+2)!!}{(4j+3)!!}$$

(ⅲ) $r\to\infty$のとき、$\left|\alpha_r-\frac{1}{2}\right|=O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$

<u>証明</u> (ｉ) 数列α_rの漸化式 $\alpha_r=1-\frac{2r}{2r+1}\alpha_{r-1}=\frac{1}{2r+1}\left\{1+\frac{4r(r-1)}{2r-1}\alpha_{r-2}\right\}$ に頼る数学的帰納法で証明する。$\alpha_2=\frac{11}{15}>\frac{7}{10}$から$j=1$のとき$\alpha_{2j}$に関する不等式は成り立つ。

jのとき正しいと仮定すると、$\alpha_{2(j+1)}>\frac{1}{4j+5}\left\{1+\frac{8(j+1)(2j+1)}{4j+3}\cdot\frac{4j+3}{2(4j+1)}\right\}$

$=\frac{8j^2+16j+5}{(4j+5)(4j+1)}>\frac{1}{2}\cdot\frac{4j+7}{4j+5}$となって、$j+1$のときも不等式が成り立つ。$\alpha_{2j+1}$に関する不等式も同じ論法で証明される。

(ⅱ) $\alpha_{2j}-\frac{1}{2}=\frac{4j}{4j+1}\cdot\frac{4j-2}{4j-1}(\alpha_{2j-2}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2(4j+1)(4j-1)}$となるので、

$\alpha_{2j}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a_j\frac{(4j)!!}{(4j+1)!!}$の形で解くと、$a_j-a_{j-1}=-\frac{(4j-3)!!}{(4j)!!}$を得る。$a_0=1$なので、

$a_j=1-\sum_{l=1}^{j}\frac{(4l-3)!!}{(4l)!!}$が従い、(2-7-1)が示される。また、(2-7-2)式も、次の漸化式の同種の産物である：

$$\frac{1}{2}-\alpha_{2j+1}=\frac{4j+2}{4j+3}\cdot\frac{4j}{4j+1}(\frac{1}{2}-\alpha_{2j-1})+\frac{1}{2(4j+3)(4j+1)}$$

（iii）(2-7)式に Stirling の公式を適用すればよい〔証明了〕。

注意 1.　[2]の注意２において述べた未解決問題が補題１によってアッサリ解決される。すなわち、

$$(4j+1)(\alpha_{2j}-\frac{1}{2})>1 \quad 故、\sum_{j=1}^{\infty}(4j+1)(\alpha_{2j}-\frac{1}{2})=\infty$$

これは、定理５（iv）において、（iii）の$\lim_{l\to\infty}\kappa_{2l}=\infty$と同様に$\lim_{l\to\infty}\kappa_{2l-1}=-\infty$を加えることを許す。

定理 2.　$m\to\infty$のとき(2-1)式が成り立つ。ここで、$\delta_{o,r}$は次の漸化式によって規定される数列である$(\delta_{0,1}=\frac{2}{3})$：

(2-8-0)　$\delta_{0,r}=\frac{\alpha_r-1}{2}-\delta_{0,r-1}$　　（rが偶数のとき）

$$\delta_{0,r}=-(4r+\frac{3}{2})\alpha_r+2r+\frac{1}{2}-\delta_{0,r-1} \quad （r が奇数のとき）$$

証明　$r-1$まで(2-1)が正しいと仮定して、rのときも(2-1)式が成り立つことを示せばよい。(2-4-2')と(2-4-3')によって、

$$T_1'=\frac{1}{m+r-1}\left\{(m-r-1)(\alpha_{r-1}(m-1)+\delta_{0,r-1})+2(r-1)\alpha_{r-2}m+2m+O(1)\right\}$$

$$=\alpha_{r-1}m+\delta_{0,r-1}-(2r+1)\alpha_{r-1}+2(r-1)\alpha_{r-2}+2+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$=\alpha_{r-1}m+\delta_{0,r-1}-4r\alpha_{r-1}+2r+1+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

および　$T_2'=\alpha_{r-1}m+\delta_{0,r-1}+O\left(\frac{1}{m}\right)$

を得る。rが偶数のとき、$\alpha_{r-1}<\frac{1}{2}$なので、十分大きなmに対して$T_1'>T_2'$となる。他方、rが奇数（$r=2j+1$）のとき、補題１（ｉ）によって

$$-4r\alpha_{r-1}+2r+1<\frac{-2(2j+1)(4j+3)}{4j+1}+(4j+3)=-\frac{4j+3}{4j+1}<0$$

つまり、十分大きなmに対して$T_1'<T_2'$と評価される。

こうして、漸化式(2-4-1')は、以下のように書き直される。すなわち、ある自然数N_rがあって$N_r\leqq m$に対し、

（イ）rが偶数のとき：

$$\varepsilon(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\varepsilon(m-1,m-1-r)+\frac{(2r+1)(m-r)+2r^2}{m+r}-\frac{2r}{m+r}(\alpha_{r-1}m+\delta_{0,r-1})+O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

（ロ）rが奇数のとき：

$$\varepsilon(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\varepsilon(m-1,m-1-r)+\frac{(2r+1)(m-r)+2r^2}{m+r}$$

$$-\frac{2r}{m+r}(\alpha_{r-1}m+\delta_{0,r-1}-4r\alpha_{r-1}+2r+1)+O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

が成り立つ。$x_m=(m+r)(m+r-1)\cdots(m-r+1)\varepsilon(m,m-r)$とおくと、

$$x_m-x_{m-1}=(2r+1-2r\alpha_{r-1})(m+r-1)\cdots(m-r)$$
$$+\{2r^2-2r(r\alpha_{r-1}+\delta_{0,r-1}+c_r)\}(m+r-1)\cdots(m-r+1)+O(m^{2r-2})$$

を導く。ここで、$c_r=0$（rが偶数）；$c_r=-4r\alpha_{r-1}+2r+1$（rが奇数）とおいた。

従って、$m\geqq N_r$のとき、

$$x_m=x_{N_r}+(2r+1)\left\{1-\frac{2r}{2r+1}\alpha_{r-1}\right\}\sum_{j=N_r+1}^{m}(j+r-1)\cdots(j-r)$$

$$+2r\{r-(r\alpha_{r-1}+\delta_{0,r-1}+c_r)\}\sum_{j=N_r+1}^{m}(j+r-1)\cdots(j-r+1)+O(m^{2r-1})$$

$$=\alpha_r(m+r)\cdots(m-r)+\{r-(r\alpha_{r-1}+\delta_{0,r-1}+c_r)\}(m+r)\cdots(m-r+1)+O(m^{2r-1})$$

つまり、(2-8-0)式によって、

$$\varepsilon(m,m-r)=\alpha_r(m-r)+(r-r\alpha_{r-1}-\delta_{0,r-1}-c_r)+O\left(\frac{1}{m}\right)=\alpha_r m+\delta_{0,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

に到達する〔証明了〕。

［１］で論じた(2-2)式の定数項$\delta_{1,r}(=\beta_{r,1}-\frac{(r+2)(r-1)}{2}\alpha_r)$

が満たすべき漸化式は、

(2-8-1)　$\delta_{1,r}=-(4r+\frac{3}{2})\alpha_r+2r+\frac{1}{2}-\delta_{1,r-1}$

であり、(2-3)式の$\delta_{2,r}\left(=\gamma_{r,1}-\frac{(r+2)(r-1)}{2}\alpha_r\right)$は、

(2-8-2)　$\delta_{2,r}=\frac{\alpha_r-1}{2}-\delta_{2,r-1}$

を満たす。初項$\delta_{i,1}=\frac{2}{3}$は$i=0,1,2$に共通の値であり、定理２の漸化式は、rの偶奇によって交互に(2-8-2)と(2-8-1)の形をとって行く。補題１を適用すれば、３つの漸化式(2-8-i)$(i=0,1,2)$が次の

命題を与えるのを示すことができる。

命題3.

（i）$\delta_{2,2j+1} < \delta_{0,2j+1} < \delta_{1,2j+1} \quad (j = 1,2,3,\cdots)$　および

$\lim_{j\to\infty} \delta_{2,2j+1} = -\infty, \lim_{j\to\infty} \delta_{0,2j+1} = \lim_{j\to\infty} \delta_{1,2j+1} = \infty$　が成り立つ。

（ii）$\delta_{2,2j+2} > \delta_{0,2j+2} > \delta_{1,2j+2} \quad (j = 1,2,3,\cdots)$　および

$\lim_{j\to\infty} \delta_{2,2j+2} = \infty, \lim_{j\to\infty} \delta_{0,2j+2} = \lim_{j\to\infty} \delta_{1,2j+2} = -\infty$　が成り立つ。

§3. 最適戦略Mの有効性

前節では戦略M同士の対戦を論じたが、この節では、戦略Mをとる甲と他の戦略をとる乙との対戦を考える。そして、戦略Mがどれほど有効であるか、という問いに答えたい。乙のとるべき戦略としては、次の3つを取りあげる。

(a)戦略Ⅰ、(b)戦略Ⅱ、そして(c)戦略ⅠとⅡを確率$\frac{1}{2}$でランダムに選択するやり方。

ケースa.　戦略Mの甲と戦略Ⅰの乙の間の対戦

残りの組数m、既知カードの枚数$a = m - r$の局面において、甲が手番のとき獲得する得点期待値を$\mu_3(m, m-r)$, 乙が手番のとき獲得する得点期待値を$\nu_4(m, m-r)$で表す。このとき、次の漸化式が成り立つ：$2 \leqq r \leqq m-1$のとき、

(3-1-1)　$$\mu_3(m, m-r) = \frac{m-r}{m+r}\{1 + \mu_3(m-1, m-1-r)\} + \frac{2r}{m+r}\max\{\mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4\}$$

(3-1-2)　$$\mathrm{T}_3 = \frac{1}{m+r-1}\Big[\, 1 + \mu_3(m-1, m-r) + (m-r)\{m-1-\nu_4(m-1, m-r)\}$$
$$+2(r-1)\{m - \nu_4(m, m-r+2)\}\,\Big]$$

(3-1-3)　$$\mathrm{T}_4 = m - \nu_4(m, m-r+1)$$

(3-2-1)　$$\nu_4(m, m-r) = \frac{m-r}{m+r}\{1 + \nu_4(m-1, m-1-r)\} + \frac{2r}{m+r}U_1$$

(3-2-2)　$$U_1 = \frac{1}{m+r-1}\Big[\, 1 + \nu_4(m-1, m-r) + (m-r)\{m-1-\mu_3(m-1, m-r)\}$$
$$+2(r-1)\{m - \mu_3(m, m-r+2)\}\,\Big]$$

$r = m$の場合には、

(3-3-1)　$$\mu_3(m, 0) = \frac{1}{2m-1}\{2m^2 - 2m + 1 + \mu_3(m-1, 0) - 2(m-1)\nu_4(m, 2)\}$$

(3-3-2) $$v_4(m,0)=\frac{1}{2m-1}\left\{2m^2-2m+1+v_4(m-1,0)-2(m-1)\mu_3(m,2)\right\}$$

戦略Ⅰ同士の対戦の場合の $\mu(m,m-r)$ と比べて、

(3-4-1) $$d_3(m,m-r)=\mu_3(m,m-r)-\mu(m,m-r)$$

(3-4-2) $$d_4(m,m-r)=v_4(m,m-r)-\mu(m,m-r)$$

とおく。$d_3(m,m-1)=d_4(m,m-1)=0$ および

(3-5-0) $$d_i(m,0)=\frac{1}{2m-1}\left\{d_i(m-1,0)-2(m-1)d_j(m,2)\right\}$$

$(i=3$ なら $j=4, i=4$ なら $j=3)$

からスタートして、$d_i(m,m-r)\ (r=2,3,\cdots)$ は次の漸化式 $(m\geqq r+1)$ を解くことによって順次定まって行く。

(3-5-1) $$d_3(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}d_3(m-1,m-1-r)+\frac{2r}{(m+r)(m+r-1)}\max\left\{T_3',T_4'\right\}$$

(3-5-2) $$T_3'=d_3(m-1,m-r)-(m-r)d_4(m-1,m-r)-2(r-1)d_4(m,m-r+2)$$

(3-5-3) $$T_4'=(2m-r-1)-(m+r-1)\left\{d_4(m,m-r+1)+\mu(m,m-r+1)\right\}$$
$$+(m-r-1)\mu(m-1,m-r)+2(r-1)\mu(m,m-r+2)$$

(3-6-1) $$d_4(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}d_4(m-1,m-1-r)+\frac{2r}{(m+r)(m+r-1)}U_1'$$

(3-6-2) $$U_1'=d_4(m-1,m-r)-(m-r)d_3(m-1,m-r)-2(r-1)d_3(m,m-r+2)$$

$r=2$ のときは容易。

(3-7-1) $$d_3(m,m-2)=\frac{7(m-2)}{3(m+2)}\quad(m\geqq 2)$$

(3-7-2) $$d_4(m,m-2)=0\quad(m\geqq 2)$$

$r=3$ に移ると、(3-5-1)式の T_3' と T_4' の大小比較が m の値によって変わる。すなわち、(イ) $4\leqq m\leqq 7$ の範囲では、

$$d_3(m,m-3)=\frac{m-3}{m+3}d_3(m-1,m-4)+\frac{2(-27m^2+279m-394)}{5(m+3)(m+2)(m+1)}$$

を得、(ロ) $m\geqq 8$ の範囲では、

$$d_3(m,m-3)=\frac{m-3}{m+3}d_3(m-1,m-4)+\frac{14(m-3)}{(m+3)(m+2)(m+1)}$$

となる。初期値 $d_i(3,0)=0\quad(i=3,4)$ の下で解いた結果は次の通り：$3\leqq m\leqq 7$ のとき、

(3-8-1) $$d_3(m,m-3)=-\frac{9(m-3)}{5(m+3)}+\frac{18}{m+3}-\frac{20\cdot 4!}{(m+3)(m+2)\cdots(m-2)}$$

$m \geqq 8$のとき

(3-8-2)　$d_3(m,m-3) = -\dfrac{14(m-3)}{5(m+3)(m+2)} + \dfrac{401}{420} \cdot \dfrac{8!}{(m+3)(m+2)\cdots(m-2)}$

そして$m \geqq 3$のとき

(3-8-3)　$d_4(m,m-3) = -\dfrac{7(m-3)}{3(m+3)}\left\{1 - \dfrac{24}{5(m+2)}\right\}$

さて、漸化式の組(3-5)と(3-6)のおかげで、

(3-9)　$d_3(m,m-r) \geqq 0$かつ$d_4(m,m-r) \leqq 0$

を数学的帰納法によって証明することができる。この正負の量は、戦略Ｉと比べた場合の戦略Ｍの有効性を示している。その大きさを評価するため、$m \to \infty$のときの漸近挙動を調べた。

<u>定理4.</u>（ｉ）$m \to \infty$のとき、次式が成り立つ$(i = 3, 4)$：

(3-10)　$d_i(m, m-r) = (-1)^{i-1}\kappa_{i,r} + O\left(\dfrac{1}{m}\right)$

ここで、rの数列$\kappa_{3,r}$と$\kappa_{4,r}(\kappa_{i,1} = 0)$は次式を満たす：

(3-11-1)　$\kappa_{3,r} = \begin{cases} \kappa_{4,r-1} & (r\text{が奇数のとき}) \\ \kappa_{4,r-1} + 2r + 1 - 4r\alpha_{r-1} & (r\text{が偶数のとき}) \end{cases}$

(3-11-2)　$\kappa_{4,r} = \kappa_{3,r-1}$　（すべての$r \geqq 2$に対して）

（ii）$\kappa_{3,2j-1} = \kappa_{4,2j} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots)$

（iii）$\kappa_{3,2j} = \kappa_{4,2j+1}$は単調増加な正数列で、$+\infty$に発散する。

<u>証明</u>（ｉ）rに関する数学的帰納法による。つまり、$r-1$まで(3-10)が正しいと仮定する。(3-5)式のT_3'とT_4'に(2-2)を適用して、

$$T_3' = \kappa_{4,r-1}(m-r) + O(1),$$

$$T_4' = (\kappa_{4,r-1} + 2r + 1 - 4r\alpha_{r-1})(m-r) + O(1)$$

を得る。補題１によって、十分大きなmに対し、

$T_3' > T_4'$　（rが奇数のとき）

$T_3' < T_4'$　（rが偶数のとき）

となる。こうして、ある自然数M_rがあって$m \geqq M_r$のとき、

(3-5-1')　$d_3(m,m-r) = \dfrac{m-r}{m+r} d_3(m-1, m-1-r) + b_r \dfrac{m-r}{(m+r)(m+r-1)} + O\left(\dfrac{1}{m^2}\right)$

が従う。ここで、b_rは(3-11-1)の右辺と一致する定数。

この漸化式を解く手順は前節と同じであり、その結果(3-10)式がrの時も成立する。他方、$d_4(m,m-r)$については、$m \geqq M_r$のとき

(3-6-1')　$d_4(m,m-r) = \dfrac{m-r}{m+r} d_4(m-1, m-1-r) - 2r\kappa_{3,r-1} \dfrac{m-r}{(m+r)(m+r-1)} + O\left(\dfrac{1}{m^2}\right)$

が導かれ、容易に(3-10)式に至る。こうして、帰納法の証明が完了する。（ii）と（iii）の主張は、$\kappa_{i,r}$を定める(3-11)式の直接の結果に過ぎない［証明了］。

ケースb.　戦略Mの甲と戦略IIの乙の間の対戦

局面$(m,m-r)$における甲の得点期待値を$\mu_5(m,m-r)$、乙のそれを$\nu_6(m,m-r)$と書くと、漸化式は$2 \leqq r \leqq m-1$のとき次の通りとなる。

(3-12-1)　$$\mu_5(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{1+\mu_5(m-1,m-1-r)\}+\frac{2r}{m+r}\max\{T_5,T_6\}$$

(3-12-2)　$$T_5=\frac{1}{m+r-1}\Big[1+\mu_5(m-1,m-r)+(m-r)\{m-1-\nu_6(m-1,m-r)\}$$
$$+2(r-1)\{m-\nu_6(m,m-r+2)\}\Big]$$

(3-12-3)　$$T_6=m-\nu_6(m,m-r+1)$$

(3-13)　$$\nu_6(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{1+\nu_6(m-1,m-1-r)\}+\frac{2r}{m+r}\{m-\mu_5(m,m-r+1)\}$$

今度は戦略II同士の対戦の場合と比較して、戦略Mの有効性をみよう。

(3-14-1)　$d_5(m,m-r)=\mu_5(m,m-r)-\nu(m,m-r)\geqq 0$

(3-14-2)　$d_6(m,m-r)=\nu_6(m,m-r)-\nu(m,m-r)\leqq 0$

とおいて、次の漸化式（$m \geqq r+1, r \geqq 2$）に取り組む。

(3-15-1)　$$d_5(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}d_5(m-1,m-1-r)+\frac{2r}{(m+r)(m+r-1)}\max\{T_5',T_6'\}$$

(3-15-2)　$$T_5'=-2m+r+1+d_5(m-1,m-r)-(m-r)d_6(m-1,m-r)$$
$$-2(r-1)d_6(m,m-r+2)+(m+r-1)\nu(m,m-r+1)$$
$$-(m-r-1)\nu(m-1,m-r)-2(r-1)\nu(m,m-r+2)$$

(3-15-3)　$$T_6'=-(m+r-1)d_6(m,m-r+1)$$

(3-16)　$$d_6(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}d_6(m-1,m-1-r)-\frac{2r}{m+r}d_5(m,m-r+1)$$

$d_i(m,m-1)=0$および$d_i(m,0)=\dfrac{1}{2m-1}\{d_i(m-1,0)-2(m-1)d_j(m,2)\}$

（$i=5$なら$j=6, i=6$なら$j=5$）からスタートして、ケースaと類似の道筋をたどり、次の結果に至る。

定理5.（i）$m\to\infty$のとき、次式が成り立つ（$i=5,6$）：

(3-17)　$$d_i(m,m-r)=(-1)^{i-1}\kappa_{i,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$$

ここで、$\kappa_{i,r}$は初期値$\kappa_{i,1}=0$と次の漸化式で規定される数列である：

(3-18-1)　$\kappa_{5,r}=\begin{cases}\kappa_{6,r-1}-(2r+1)+4r\alpha_{r-1} & (r\text{が奇数のとき})\\ \kappa_{6,r-1} & (r\text{が偶数のとき})\end{cases}$

(3-18-2)　$\kappa_{6,r}=\kappa_{5,r-1}$　（すべての$r\geqq 2$に対して）

(ii)　$\kappa_{5,2j}=\kappa_{6,2j+1}=0\quad (j=1,2,\cdots)$

(iii)　$\kappa_{5,2j+1}=\kappa_{6,2j+2}\quad (j=1,2,\cdots)$は単調増加な正数列で、$+\infty$に発散する。

最後に$2\leqq r\leqq 4$に対し、方程式系(3-15)(3-16)の厳密解を記す。

$$d_5(m,m-2)=d_6(m,m-2)=0$$

$$d_5(m,m-3)=\frac{9}{5}-\frac{12}{m+3}+\frac{6!}{5(m+3)(m+2)\cdots(m-2)}$$

$$d_6(m,m-3)=d_5(m,m-4)=0$$

$$d_6(m,m-4)=-\frac{9}{5}+\frac{96}{7(m+4)}-\frac{4}{5}\cdot\frac{6!}{(m+4)(m+3)\cdots(m-1)}+\frac{4}{35}\cdot\frac{8!}{(m+4)(m+3)\cdots(m-3)}$$

<u>ケースc.</u> 戦略Mの甲と戦略I，IIをランダムに選ぶ乙の対戦

甲の手番のときの得点期待値を$\mu_7(m,m-r)$，乙の手番のときのそれを$\nu_8(m,m-r)$で表すと、次式が成り立つ：$2\leqq r\leqq m-1$のとき、

(3-19-1)　$$\mu_7(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{1+\mu_7(m-1,m-1-r)\}+\frac{2r}{m+r}\max\{T_7,T_8\}$$

(3-19-2)　$$T_7=\frac{1}{m+r-1}\Big[1+\mu_7(m-1,m-r)+(m-r)\{m-1-\nu_8(m-1,m-r)\}+2(r-1)\{m-\nu_8(m,m-r+2)\}\Big]$$

(3-19-3)　$$T_8=m-\nu_8(m,m-r+1)$$

(3-20-1)　$$\nu_8(m,m-r)=\frac{m-r}{m+r}\{1+\nu_8(m-1,m-1-r)\}+\frac{2r}{m+r}U_2$$

(3-20-2)　$$U_2=\frac{1}{2(m+r-1)}\Big[1+\nu_8(m-1,m-r)+(m-r)\{m-1-\mu_7(m-1,m-r)\}+2(r-1)\{m-\mu_7(m,m-r+2)\}\Big]+\frac{1}{2}\{m-\mu_7(m,m-r+1)\}$$

また、$m=r$のときは

(3-21-1)　$$\mu_7(m,0)=\frac{1}{2m-1}\{1+\mu_7(m-1,0)+2(m-1)(m-\nu_8(m,2))\}$$

(2-21-2)　$$\nu_8(m,0)=\frac{1}{2m-1}\{1+\nu_8(m-1,0)+2(m-1)(m-\mu_7(m,2))\}$$

となり、$\mu_7(m,m-1)=\nu_8(m,m-1)=\dfrac{m+2}{3}$ も前の２つのケースと変わらない。

$r=2$ の場合に上記漸化式を解くと、

$$\mu_7(m,m-2)=\frac{11}{15}m-\frac{4}{5},\ \nu_8(m,m-2)=\frac{11}{15}m-\frac{59}{30}+\frac{14}{3(m+2)}$$

を得る。

<u>定理 6.</u>　(ｉ)$m\to\infty$ のとき、次式が成り立つ：

(3-22-1)　$\mu_7(m,m-r)=\alpha_r m+\tau_{1,r}+O\left(\dfrac{1}{m}\right)$

(3-22-2)　$\nu_8(m,m-r)=\alpha_r m+\tau_{2,r}+O\left(\dfrac{1}{m}\right)$

ここで、$\tau_{i,r}(\tau_{i,1}=\dfrac{2}{3})$ は次式で定まる数列である。

(3-23-1)　$\tau_{1,r}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_r-1}{2}-\tau_{2,r-1} & (r\text{が偶数のとき})\\ -(4r+\dfrac{3}{2})\alpha_r+2r+\dfrac{1}{2}-\tau_{2,r-1} & (r\text{が奇数のとき})\end{cases}$

(3-23-2)　$\tau_{2,r}=-(2r+\dfrac{1}{2})\alpha_r+r-\tau_{1,r-1}$　（すべての $r\geqq 2$ に対して）

(ⅱ)　$\tau_{1,2}-\delta_{0,2}=0\,;\,j\geqq 2$ のとき

$$\tau_{1,2j}-\delta_{0,2j}=\sum_{l=2}^{j}(4l-1)(\frac{1}{2}-\alpha_{2l-1})>0$$

および $j\geqq 1$ のとき

$$\tau_{1,2j+1}-\delta_{0,2j+1}=\sum_{l=1}^{j}(4l+1)(\alpha_{2l}-\frac{1}{2})>0$$

はいずれも、$j\to\infty$ のとき $+\infty$ に発散する。

(ⅲ)　$\delta_{0,2j}-\tau_{2,2j}=\sum_{l=1}^{j}(4l+1)(\alpha_{2l}-\dfrac{1}{2})>0\quad(j=1,2,\cdots)$

および

$$\delta_{0,2j+1}-\tau_{2,2j+1}=\sum_{l=1}^{j}(4l+3)(\frac{1}{2}-\alpha_{2l+1})>0\quad(j=1,2,\cdots)$$

はいずれも、$j\to\infty$ のとき $+\infty$ に発散する。

定理 6 で分析された２つの正の量 $\tau_{1,r}-\delta_{0,r}$ と $\delta_{0,r}-\tau_{2,r}$ は、戦略Ｉと Ⅱを局面ごとにランダムに選ぶ戦略と比べた場合の、最適戦略Ｍの有効性を示している。

§4. まとめ

著者の論文［1］，［2］およびこの論文で論じた「神経衰弱」の種々の戦略を比較検討し、得点期待値のレベルで優劣を判定した結果をまとめる。このため、最適戦略Mをとる甲の立場からその得失を勘定することとする。つまり、対戦相手の乙が最適戦略をとらずに他の劣った戦略に固執する場合、甲にどれほどの有利さをもたらすことになるのか、これまでの結果を整理して答える。

この節の前半は、残りの組数mが大きくなるときの漸近挙動に焦点を当て、後半は有限のmの値（紙数の制約から、$2 \leqq m \leqq 7$の範囲に限定する）に対する局面（$m, m-r$）毎の得点期待値の変動を表の形で示す。特に、戦略Mにおいて、戦略Ⅰの（２枚目を未知カードの中から選ぶ）やり方が戦略Ⅱ（２枚目を既知カードの中から選ぶ）よりも望ましい局面をすべて表の中で指し示す。

まず、乙も戦略Mをとる場合から始めよう。局面$(m, m-r)$における甲の得点期待値の漸近挙動は、

（イ）甲の手番のとき：　$\varepsilon(m, m-r) = \alpha_r m + \delta_{0,r} + O\left(\frac{1}{m}\right)$

（ロ）乙の手番のとき：　$m - \varepsilon(m, m-r) = (1-\alpha_r)m - \delta_{0,r} + O\left(\frac{1}{m}\right)$

となる。第一項の$\alpha_r m$と$(1-\alpha_r)m$は、以下すべての式に共通するので、第二項の定数$\delta_{0,r}$と$-\delta_{0,r}$が種々の戦略の比較においてそれぞれ、基準の値をなすことに留意する。

（１）戦略Mの甲に対して、乙が戦略Ⅰをとる場合

乙が戦略Mをとらずに戦略Ⅰを選んだことから生じる甲の有利さは、$m \to \infty$のとき、

（イ）甲の手番のとき：$\mu_3(m, m-r) - \varepsilon(m, m-r) = \kappa_{3,r} + \delta_{1,r} - \delta_{0,r} + O\left(\frac{1}{m}\right)$

その定数項をみると、$\kappa_{3,2j} + \delta_{1,2j} - \delta_{0,2j} = 0$,　そして

$\kappa_{3,2j+1} + \delta_{1,2j+1} - \delta_{0,2j+1} = 2\sum_{l=1}^{j}(4l+1)(\alpha_{2l} - \frac{1}{2}) \to \infty$（$j \to \infty$のとき）となる。

（ロ）乙の手番のとき：$\varepsilon(m, m-r) - \nu_4(m, m-r) = \kappa_{4,r} - \delta_{1,r} + \delta_{0,r} + O\left(\frac{1}{m}\right)$

その定数項をみると、$\kappa_{4,2j} - \delta_{1,2j} + \delta_{0,2j} = 2\sum_{l=1}^{j}(4l+1)(\alpha_{2l} - \frac{1}{2}) \to \infty$（$j \to \infty$のとき）、

そして$\kappa_{4,2j+1} - \delta_{1,2j+1} + \delta_{0,2j+1} = 0$となる。

（２）戦略Mの甲に対して、乙が戦略Ⅱをとる場合

乙が戦略Mをとらずに戦略Ⅱを選んだことから生じる甲の有利さは、$m \to \infty$のとき、

（イ）　甲の手番のとき：$\mu_5(m,m-r)-\varepsilon(m,m-r)=\kappa_{5,r}+\delta_{2,r}-\delta_{0,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$

その定数項は、$\kappa_{5,2}+\delta_{2,2}-\delta_{0,2}=0, j\geqq 2$ に対して

$\kappa_{5,2j}+\delta_{2,2j}-\delta_{0,2j}=2\sum_{l=2}^{j}(4l-1)(\frac{1}{2}-\alpha_{2l-1})\to\infty$（$j\to\infty$ のとき）、そして

$\kappa_{5,2j+1}+\delta_{2,2j+1}-\delta_{0,2j+1}=0$ となる。

（ロ）　乙の手番のとき：$\varepsilon(m,m-r)-\nu_6(m,m-r)=\kappa_{6,r}-\delta_{2,r}+\delta_{0,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$

その定数項は、$\kappa_{6,2j}-\delta_{2,2j}+\delta_{0,2j}=0$, そして

$\kappa_{6,2j+1}-\delta_{2,2j+1}+\delta_{0,2j+1}=2\sum_{l=1}^{j}(4l+3)(\frac{1}{2}-\alpha_{2l+1})\to\infty$（$j\to\infty$ のとき）となる。

（3）戦略Ｍの甲に対して、乙が戦略Ⅰ，Ⅱを確率$\frac{1}{2}$でランダムに選ぶ戦略をとる場合

この場合も同様に、甲の有利さを調べると、$m\to\infty$ のとき、

（イ）　甲の手番のとき：$\mu_7(m,m-r)-\varepsilon(m,m-r)=\tau_{1,r}-\delta_{0,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$

なお、定数項$\tau_{1,r}-\delta_{0,r}$は定理 6（ⅱ）で論じられているが、（1）の対応する定数項と（2）のそれとの平均値に他ならぬ。

（ロ）乙の手番のとき：$\varepsilon(m,m-r)-\nu_8(m,m-r)=\delta_{0,r}-\tau_{2,r}+O\left(\frac{1}{m}\right)$

なお、定数項$\delta_{0,r}-\tau_{2,r}$は定理 6（ⅲ）で論じられているが、（1）の対応する定数項と（2）のそれとの平均値に他ならぬ。

以上いずれの場合においても、戦略 M の甲はmが十分大きいとき、<u>rの偶奇</u>に注意を払わねばならぬ。つまり、rが奇数ならば戦略Ⅰのやり方に、rが偶数ならば戦略Ⅱのやり方に従う。

<u>注意 2</u>.　めくられたカードは１枚しか記憶できぬＢ、あるいは全く記憶できぬＣを対戦相手にすると、戦略Ⅱは意味を失い、戦略Ｍは戦略Ⅰに一致する。[2] §2 の結果より、いずれのケースにおいても完全に記憶する甲の得点期待値は$m-O\left(\frac{1}{m}\right)$（$m\to\infty$ のとき）であり、相手を圧倒するほどの優位に立つ。

さて、有限のmの値に対して、戦略 M の甲の有利さはいかほどか。局面$(m,m-r)$毎に対応する漸化式に従って甲の得点期待値を算出し、以下のように表の形にまとめて、この節を閉じる。甲の手番のときに戦略Ⅰのやり方に従う局面は｛　　｝で表中に示し、残りの局面では、もちろん戦略Ⅱのやり方にスウィッチする。なお、$r\leqq 1$の明らかなケースは省略し、$2\leqq r\leqq m\leqq 7$の範囲に限定した。

（0）対戦相手の乙が戦略Mをとるケース

（イ）甲の手番のとき、甲の得点期待値$\varepsilon(m,m-r)$を示す。なお、（ロ）乙の手番のときは、甲の得点期待値$m-\varepsilon(m,m-r)$は（イ）の結果からすぐわかるので不要。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\{\frac{2}{3}\}$ 0.667	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{7}{5}$ 1.4	$\{\frac{7}{5}\}$ 1.4	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{32}{15}$ 2.133	$\{\frac{72}{35}\}$ 2.057	$\{\frac{68}{35}\}$ 1.943	*	*	*
$m=5$	$\frac{43}{15}$ 2.867	$\{\frac{37}{14}\}$ 2.643	$\frac{109}{45}$ 2.422	$\{\frac{116}{45}\}$ 2.578	*	*
$m=6$	$\frac{18}{5}$ 3.6	$\{\frac{334}{105}\}$ 3.181	$\frac{661}{225}$ 2.938	$\frac{3589}{1155}$ 3.107	$\{\frac{171}{55}\}$ 3.109	*
$m=7$	$\frac{13}{3}$ 4.333	$\{\frac{129}{35}\}$ 3.686	$\frac{115}{33}$ 3.485	$\frac{4174}{1155}$ 3.614	$\{\frac{7633}{2145}\}$ 3.559	$\{\frac{1566}{455}\}$ 3.442

(1) 対戦相手の乙が戦略Ⅰをとるケース

(イ) 甲の手番のとき、甲の得点期待値 $\mu_3(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\{\frac{2}{3}\}$ 0.667	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{7}{5}$ 1.4	$\{\frac{7}{5}\}$ 1.4	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{32}{15}$ 2.133	$\frac{274}{105}$ 2.61	$\{\frac{274}{105}\}$ 2.61	*	*	*
$m=5$	$\frac{43}{15}$ 2.867	$\frac{683}{210}$ 3.252	$\{\frac{109}{35}\}$ 3.114	$\{\frac{349}{135}\}$ 2.585	*	*
$m=6$	$\frac{18}{5}$ 3.6	$\frac{797}{210}$ 3.795	$\{\frac{16726}{4725}\}$ 3.54	$\frac{1332}{385}$ 3.46	$\{\frac{1332}{385}\}$ 3.46	*
$m=7$	$\frac{13}{3}$ 4.333	$\frac{6766}{1575}$ 4.296	$\{\frac{130}{33}\}$ 3.939	$\frac{14371}{3465}$ 4.147	$\frac{565787}{135135}$ 4.187	$\{\frac{565787}{135135}\}$ 4.187

(ロ) 乙の手番のとき、甲の得点期待値 $m - v_4(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\frac{4}{3}$ 1.333	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{31}{15}$ 2.067	$\frac{8}{5}$ 1.6	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{119}{45}$ 2.644	$\frac{211}{105}$ 2.01	$\frac{72}{35}$ 2.057	*	*	*
$m=5$	$\frac{47}{15}$ 3.133	$\frac{86}{35}$ 2.457	$\frac{2612}{945}$ 2.764	$\frac{2948}{945}$ 3.12	*	*
$m=6$	$\frac{107}{30}$ 3.567	$\frac{3599}{1260}$ 2.856	$\frac{16288}{4725}$ 3.447	$\frac{7628}{2079}$ 3.669	$\frac{1040}{297}$ 3.502	*
$m=7$	$\frac{107}{27}$ 3.963	$\frac{5416}{1575}$ 3.439	$\frac{23591}{5775}$ 4.085	$\frac{18551}{4455}$ 4.164	$\frac{530399}{135135}$ 3.925	$\frac{79108}{19305}$ 4.098

(2) 対戦相手の乙が戦略Ⅱをとるケース

（イ）甲の手番のとき、甲の得点期待値 $\mu_5(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\{\frac{2}{3}\}$ 0.667	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{7}{5}$ 1.4	$\{\frac{7}{5}\}$ 1.4	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{32}{15}$ 2.133	$\{\frac{72}{35}\}$ 2.057	$\{\frac{68}{35}\}$ 1.943	*	*	*
$m=5$	$\frac{43}{15}$ 2.867	$\{\frac{37}{14}\}$ 2.643	$\frac{283}{105}$ 2.695	$\{\frac{283}{105}\}$ 2.695	*	*
$m=6$	$\frac{18}{5}$ 3.6	$\{\frac{334}{105}\}$ 3.181	$\frac{1769}{525}$ 3.37	$\frac{10804}{3465}$ 3.118	$\{\frac{10804}{3465}\}$ 3.118	*
$m=7$	$\frac{13}{3}$ 4.333	$\{\frac{129}{35}\}$ 3.686	$\frac{23326}{5775}$ 4.039	$\{\frac{491}{126}\}$ 3.897	$\frac{177077}{45045}$ 3.931	$\{\frac{177077}{45045}\}$ 3.931

（ロ）乙の手番のとき、甲の得点期待値 $m - v_6(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\frac{4}{3}$ 1.333	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{8}{5}$ 1.6	$\frac{8}{5}$ 1.6	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{28}{15}$ 1.867	$\frac{72}{35}$ 2.057	$\frac{72}{35}$ 2.057	*	*	*
$m=5$	$\frac{32}{15}$ 2.133	$\frac{373}{140}$ 2.664	$\frac{116}{45}$ 2.578	$\frac{116}{45}$ 2.578	*	*
$m=6$	$\frac{12}{5}$ 2.4	$\frac{1381}{420}$ 3.288	$\frac{964}{315}$ 3.06	$\frac{11426}{3465}$ 3.298	$\frac{11426}{3465}$ 3.298	*
$m=7$	$\frac{8}{3}$ 2.677	$\frac{4111}{1050}$ 3.915	$\frac{812}{231}$ 3.515	$\frac{40702}{10395}$ 3.916	$\frac{173456}{45045}$ 3.851	$\frac{173456}{45045}$ 3.851

(3) 対戦相手の乙が戦略Ⅰ，Ⅱを確率$\frac{1}{2}$でランダムに選ぶ戦略をとるケース

（イ）甲の手番のとき、甲の得点期待値$\mu_7(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\{\frac{2}{3}\}$ 0.667	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{7}{5}$ 1.4	$\{\frac{7}{5}\}$ 1.4	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{32}{15}$ 2.133	$\frac{239}{105}$ 2.276	$\{\frac{239}{105}\}$ 2.276	*	*	*
$m=5$	$\frac{43}{15}$ 2.867	$\frac{2347}{840}$ 2.794	$\{\frac{2047}{756}\}$ 2.708	$\{\frac{2474}{945}\}$ 2.618	*	*
$m=6$	$\frac{18}{5}$ 3.6	$\{\frac{4229}{1260}\}$ 3.356	$\frac{30313}{9450}$ 3.208	$\frac{138283}{41580}$ 3.326	$\{\frac{138283}{41580}\}$ 3.326	*
$m=7$	$\frac{13}{3}$ 4.333	$\{\frac{1369}{350}\}$ 3.911	$\frac{131639}{34650}$ 3.799	$\frac{560569}{124740}$ 4.494	$\{\frac{452581}{102960}\}$ 4.396	$\{\frac{2422139}{540540}\}$ 4.481

（ロ）乙の手番のとき、甲の得点期待値$m-v_8(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\frac{4}{3}$ 1.333	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{11}{6}$ 1.833	$\frac{8}{5}$ 1.6	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{203}{90}$ 2.256	$\frac{121}{60}$ 2.017	$\frac{72}{35}$ 2.057	*	*	*
$m=5$	$\frac{79}{30}$ 2.633	$\frac{71}{28}$ 2.536	$\frac{20563}{7560}$ 2.72	$\frac{2563}{945}$ 2.712	*	*
$m=6$	$\frac{179}{60}$ 2.983	$\frac{5179}{1680}$ 3.083	$\frac{17801}{5400}$ 3.296	$\frac{535097}{166320}$ 3.217	$\frac{32876}{10395}$ 3.163	*
$m=7$	$\frac{179}{54}$ 3.315	$\frac{22969}{6300}$ 3.646	$\frac{37651}{8316}$ 4.528	$\frac{3740287}{997920}$ 3.748	$\frac{1599487}{393120}$ 4.069	$\frac{39563}{9009}$ 4.391

(4) 比較の参考資料として、甲乙両者が戦略Ⅰをとるケースで、手番の甲の得点期待値 $\mu(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\frac{2}{3}$ 0.667	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{14}{15}$ 0.933	$\frac{7}{5}$ 1.4	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{61}{45}$ 1.356	$\frac{72}{35}$ 2.057	$\frac{274}{105}$ 2.61	*	*	*
$m=5$	$\frac{28}{15}$ 1.867	$\frac{229}{84}$ 2.726	$\frac{2878}{945}$ 3.046	$\frac{109}{45}$ 2.422	*	*
$m=6$	$\frac{73}{30}$ 2.433	$\frac{4253}{1260}$ 3.375	$\frac{16286}{4725}$ 3.447	$\frac{3194}{1155}$ 2.765	$\frac{27362}{10395}$ 2.632	*
$m=7$	$\frac{82}{27}$ 3.037	$\frac{1259}{315}$ 3.997	$\frac{4427}{1155}$ 3.833	$\frac{19780}{6237}$ 3.171	$\frac{439742}{135135}$ 3.254	$\frac{515337}{135135}$ 3.813

(5) 甲、乙両者が戦略Ⅱをとるケースで、手番の甲の得点期待値 $v(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\frac{2}{3}$ 0.667	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{7}{5}$ 1.4	$\frac{7}{5}$ 1.4	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{32}{15}$ 2.133	$\frac{68}{35}$ 1.943	$\frac{68}{35}$ 1.943	*	*	*
$m=5$	$\frac{43}{15}$ 2.867	$\frac{327}{140}$ 2.336	$\frac{283}{105}$ 2.695	$\frac{283}{105}$ 2.695	*	*
$m=6$	$\frac{18}{5}$ 3.6	$\frac{1139}{420}$ 2.712	$\frac{1769}{525}$ 3.37	$\frac{30}{11}$ 2.727	$\frac{30}{11}$ 2.727	*
$m=7$	$\frac{13}{3}$ 4.333	$\frac{3239}{1050}$ 3.085	$\frac{23326}{5775}$ 4.039	$\frac{10702}{3465}$ 3.089	$\frac{58517}{15015}$ 3.897	$\frac{58517}{15015}$ 3.897

(6) 戦略Ⅰの甲と戦略Ⅱの乙が対戦するケース

(イ) 甲の手番のとき、甲の得点期待値 $\mu_1(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\frac{2}{3}$ 0.667	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{14}{15}$ 0.933	$\frac{7}{5}$ 1.4	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{61}{45}$ 1.356	$\frac{209}{105}$ 1.99	$\frac{68}{35}$ 1.943	*	*	*
$m=5$	$\frac{28}{15}$ 1.867	$\frac{89}{35}$ 2.543	$\frac{2113}{945}$ 2.236	$\frac{1777}{945}$ 1.88	*	*
$m=6$	$\frac{73}{30}$ 2.433	$\frac{429}{140}$ 3.064	$\frac{12062}{4725}$ 2.553	$\frac{4946}{2079}$ 2.379	$\frac{30452}{10395}$ 2.929	*
$m=7$	$\frac{82}{27}$ 3.037	$\frac{5609}{1575}$ 3.561	$\frac{1762576}{605605}$ 2.91	$\frac{90929}{31185}$ 2.916	$\frac{30320}{9009}$ 3.366	$\frac{623221127}{212567355}$ 2.932

(ロ) 乙の手番のとき、甲の得点期待値 $m - v_2(m, m-r)$ を示す。

	$r=2$	$r=3$	$r=4$	$r=5$	$r=6$	$r=7$
$m=2$	$\frac{4}{3}$ 1.333	*	*	*	*	*
$m=3$	$\frac{8}{5}$ 1.6	$\frac{8}{5}$ 1.6	*	*	*	*
$m=4$	$\frac{28}{15}$ 1.867	$\frac{146}{105}$ 1.39	$\frac{146}{105}$ 1.39	*	*	*
$m=5$	$\frac{32}{15}$ 2.133	$\frac{367}{210}$ 1.748	$\frac{2282}{945}$ 2.415	$\frac{2282}{945}$ 2.415	*	*
$m=6$	$\frac{12}{5}$ 2.4	$\frac{463}{210}$ 2.205	$\frac{2773}{945}$ 2.934	$\frac{978}{385}$ 2.54	$\frac{978}{385}$ 2.54	*
$m=7$	$\frac{8}{3}$ 2.667	$\frac{4259}{1575}$ 2.704	$\frac{2797}{825}$ 3.39	$\frac{5175637}{1816815}$ 2.849	$\frac{390122}{135135}$ 2.887	$\frac{390122}{135135}$ 2.887

終わりに、読みにくい原稿を労もいとわず清書して下さった鴨藤江利子さんに、感謝の言葉を申し述べます。

参考文献

［1］　野田明男、カード・ゲームの数理ノート；「神経衰弱」における戦略について、浜松医科大学紀要一般教育 15:1-18,2001

［2］　野田明男、カード・ゲームの数理ノートⅡ；「神経衰弱」における戦略について、浜松医科大学紀要一般教育 16:9-29,2002