パロンドのパラドックスを生成するパラメータ空間の凸領域

パロンドのパラドックスを生成するパラメータ空間の凸領域

野田明男
（総合人間科学講座・数学）

A Convex Domain in the Parameter Space that Generates Parrondo's Paradox

Akio NODA
Integrated Human Sciences · Mathematics

Abstract: The author proposed, in his classes for medical students at Hamamatsu, a study of Parrondo's paradox described in these books [1], [2] and [3]. This paradox interested them and their naïve discussions in the classes stimulated him to investigate the class of all Parrondo's games from a viewpoint of generalized random walks ([4].

The game consists of two basic games A and B of the same type. Suppose that a player repeats the game and observes the partial sum $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ at time n. Then, if S_n is a multiple of 3, she plays game A to get the next result X_{n+1} that takes on one of the two values, +1(win) and –1(loss); otherwise she plays game B to get the result X'_{n+1} in like manner. We can therefore parametrize such a game by means of the expectations of games A and B, which we put $E(X_{n+1}) = -\alpha, E(X'_{n+1}) = \beta \ (-1 < \alpha, \beta < 1)$.

Our main result is Theorem 4 which asserts that S_n/n converges (in the weak sense) to the value $\delta_1 = 3\{2\beta - \alpha(1+\beta^2)\}/(9+\beta^2-2\alpha\beta)$ as $n \to \infty$. Hence we see that the game is favorable or unfavorable for a player according to $\delta_1 > 0$ or $\delta_1 < 0$. Since the domain given by $\alpha < 2\beta / (1+\beta^2)$, $0 \le \beta < 1$, is convex, we now explain how one can generate Parrondo's paradox. Indeed, noting that the mixed strategy of game I with α_1, β_1 and game II with α_2, β_2 becomes the game having the parameter $\bar{\alpha} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \bar{\beta} = (\beta_1 + \beta_2)/2$, we generate various examples of α_i, β_i (i =1,2) in the final section, such that the inequality $\alpha_i > 2\beta_i / (1+\beta_i^2)$ holds for each i, whereas we have the inverse inequality $\bar{\alpha} < 2\bar{\beta}/(1+\bar{\beta}^2)$ satisfied by the mixed strategy.

Applying the theory of generalized random walks developed in [4], we can also solve the ruin problem for every Parrondo's game; we thus understand his paradox from another point of view.

Key words: Parrondo's paradox, generalized random walk, mixed strategy, convexity

§1．序（不利なゲームの混合戦略から，有利なゲームが生成されるパロンドのゲームの楽しさ）

著者が担当する「人間科学ゼミナールⅠ,Ⅱ」(それぞれ医学科1年生8名，2年生9名の受講生をもつ)という授業において，パロンドのパラドックス([1]～[3]参照)を取りあげて，皆で討論する機会を平成25年度設けたところ，受講生たちからさまざまな意見，考えを聞くことができた。これに刺激されて，パラドックスの生まれる仕組みを自分なりに解明しようと思うに至る。幸に夏休み中，研究に専念できる時間があり，パロンドのゲームにおける総利得 $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ の平均と分散を計算することに成功した。ここで，X_k は k 回目のゲームにおける利得を表し，勝てば $+1$，負ければ -1 という2値の確率変数で，互いに独立である。S_n の平均と分散の式(命題2，3)から，1ゲーム当たりの利得 S_n/n は $n\to\infty$ のとき，一定の値に弱収束する(定理4)という事実を見出す。この極限値の正・負によって，ゲームの有利・不利が判定できることになる。

さて，パロンドのゲームの有利，不利を識別するパラメータとして，このゲームを構成する基本ゲームAとBの期待値 $-\alpha$ と $\beta\ (-1<\alpha,\beta<1)$ を採用する。すなわち，ゲームを n 回繰り返した時点で，総利得 S_n が3の倍数ならゲームAを行う。(その結果を X_{n+1} とかく。$E(X_{n+1})=-\alpha$ ゆえ，$0<\alpha<1$ のとき不利なゲームとなる。)他方，S_n が3の倍数でなければ，ゲームBを行う。(その結果を X'_{n+1} とかく。$E(X'_{n+1})=\beta$ なので，$0<\beta<1$ のとき有利なゲームとなる。)このとき，ゲームA，Bの勝つ確率はそれぞれ，$P(X_{n+1}=1)=\dfrac{1-\alpha}{2}, P(X'_{n+1}=1)=\dfrac{1+\beta}{2}$ で与えられる。また，$-\alpha=\beta$ の場合には，ゲームA，Bは同一で，S_n は単純なランダムウォークになることに留意する。(パロンドのゲームを[4]で記されるのとは違う方向に，「一般化」されたランダムウォークとみることができる。なお§4の註3参照。)こうして，S_n/n の極限値は α と β を用いて表すことができ，ゲームの有利さを示す (β,α) の領域 Γ は不等式 $\alpha<\dfrac{2\beta}{1+\beta^2}$ で記述される。(われわれは β の方を横軸にとる。) 境界線 $\alpha=\dfrac{2\beta}{1+\beta^2}$ は原点対称，$0\le\beta<1$ のとき上に凸な曲線ゆえ，$\Gamma_+=\Gamma\cap\{0\le\beta<1\}$ が凸領域となる。($-1<\beta<0$ のときは，不利さを示す領域の方が凸となる。)

以下現論文の内容構成を述べて，この節を終える。§2では，S_n を3で割ったとき余りが0となる確率 p_n および余りが1となる確率 q_n を求める(命題1)ことから始める。p_n の式から S_n の平均 μ_n が容易に導かれる(命題2)。§3は，S_n の分散 σ_n^2 を求める(命題3)ことに費やされる。このためには，p_n に加えて q_n の式も必要となる。そして命題2, 3の系として，S_n/n の弱収束が極限値の式とともに証明される(定理4)。最後の§4では，単独ではいずれも不利なゲームⅠとⅡ((β_1,α_1) と (β_2,α_2) にそれぞれ対応)から，混合戦略(公正なコインを投げて表が出ればゲームⅠ，裏が出ればゲームⅡを行う)を採用することにより，上述の Γ_+ の凸性のおかげで有利なゲームが生成される様子を調べる。$-1<\beta<0$ の場合に目を向ければ，単独ではいずれも有利なゲームⅠ，Ⅱから，混合戦略により不利なゲームを生成することも可能である。

§ 2.　S_nの平均μ_n

まず総利得S_nを3で割ったとき，余りが0，1，2となる確率をそれぞれp_n，q_n，r_nとして，p_nとq_nを求める$(r_n = 1 - p_n - q_n)$。$S_0 = 0$ゆえ$p_0 = 1$，$q_0 = r_0 = 0$を初期値にもち，漸化式は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & 1+\beta \\ 1-\alpha & 0 & 1-\beta \\ 1+\alpha & 1+\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

この式に$r_n = 1 - p_n - q_n$を代入して，(p_n, q_n)の漸化式に移る。

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\beta \\ 1-\beta \end{pmatrix} - \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1+\beta & 2\beta \\ \alpha-\beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

$n \to \infty$のとき，p_nとq_nの極限値の存在を仮定して，その値を求めると，

$p_\infty = (3+\beta^2)/(9+\beta^2-2\alpha\beta)$，$q_\infty = \{3-\beta-\alpha(1+\beta)\}/(9+\beta^2-2\alpha\beta)$となる。

$u_n = p_n - p_\infty$，$v_n = q_n - q_\infty$とおけば，

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p_\infty \\ -q_\infty \end{pmatrix}$$を得て，解は

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n A^n \begin{pmatrix} 1-p_\infty \\ -q_\infty \end{pmatrix}$$と表される。

A^nの計算には，固有値と固有ベクトルを求めてAを対角化するのが常道である。われわれは，固有方程式$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$の判別式が正$\left(\beta(2\alpha-\beta) > 0\right)$のときに限定して，以下結果を述べて行く。ゲームの有利，不利を画する境界線はこの不等式の表す領域に含まれる。$\beta(2\alpha-\beta) \le 0$の場合に成立する$p_n$の式を（註1）として命題1の直後に記すことにする。

さて，固有ベクトルから構成される行列

$$U = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1-\sqrt{(2\alpha-\beta)/\beta} & 1+\sqrt{(2\alpha-\beta)/\beta} \end{pmatrix}$$によって

$$AU = U\begin{pmatrix} 1+\sqrt{\beta(2\alpha-\beta)} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{\beta(2\alpha-\beta)} \end{pmatrix}$$と書けるので，解

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{9+\beta^2-2\alpha\beta}\begin{pmatrix} h_+ & h_- \\ j_+h_+ & j_-h_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\lambda_+)^n \\ (\lambda_-)^n \end{pmatrix}$$に至る。ここで，

$h_\pm = 3 - \alpha\beta \pm (\alpha+\beta)/\sqrt{(2\alpha-\beta)/\beta}$，$j_\pm = \left(-1 \pm \sqrt{(2\alpha-\beta)/\beta}\right)/2$，$\lambda_\pm = -\dfrac{1 \pm \sqrt{\beta(2\alpha-\beta)}}{2}$

（複号同順）である。$0 < 1 - \sqrt{\beta(2\alpha-\beta)} < 1 + \sqrt{\beta(2\alpha-\beta)} < 2$に注意すれば，$n \to \infty$のとき，$u_n$，$v_n$は急速に0に収束することがわかる。

<u>命題1.</u> $\beta(2\alpha-\beta)>0$ のとき，次式を得る。

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \frac{1}{9+\beta^2-2\alpha\beta}\left\{\begin{pmatrix} 3+\beta^2 \\ 3-\beta-\alpha(1+\beta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_+ & h_- \\ j_+h_+ & j_-h_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\lambda_+)^n \\ (\lambda_-)^n \end{pmatrix}\right\}$$

（註1） $\beta(2\alpha-\beta)=0$ のときは， $p_n = \frac{1}{9}\left\{3+\beta^2+2(3-\alpha\beta+(\alpha+\beta)|\beta|n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ となる。

$\beta(2\alpha-\beta)<0$ のときは，複素数 $\frac{1+i\sqrt{|\beta(2\alpha-\beta)|}}{2}$ を $\mathrm{R}e^{i\theta}$ と極座標表示して，

$p_n = \frac{1}{9+\beta^2-2\alpha\beta}\left\{3+\beta^2+2(3-\alpha\beta)(-R)^n\cos(n\theta)+\frac{2(\alpha+\beta)}{\sqrt{|(2\alpha-\beta)/\beta|}}(-R)^n\sin(n\theta)\right\}$ と実数に書き直す。（ q_n の式については省く。）

以上の議論により p_n の式を得たので， S_n の平均 μ_n を求める準備が整う。
S_n が3の倍数となる事象 A_n の定義関数 1_{A_n} を用いると，
$S_{n+1} = S_n + 1_{A_n}\cdot X_{n+1} + (1-1_{A_n})X'_{n+1}$ と書ける。 1_{A_n} と (X_{n+1}, X'_{n+1}) は互いに独立ゆえ，漸化式 $\mu_{n+1}-\mu_n = \beta-(\alpha+\beta)p_n$ を得る。こうして， $\mu_n = \sum_{k=0}^{n-1}\{\beta-(\alpha+\beta)p_k\}$ を計算すれば， $\beta(2\alpha-\beta)>0$ のとき次式に至る。

$$\mu_n = (\delta_1 n-\delta_0)+\{k_+\lambda_+^n + k_-\lambda_-^n\}$$

ここで,

$$\delta_1 = \beta-(\alpha+\beta)p_\infty = \frac{3(2\beta-\alpha(1+\beta^2))}{9+\beta^2-2\alpha\beta}, \quad \delta_0 = \left(\frac{2}{9+\beta^2-2\alpha\beta}\right)^2(\alpha+\beta)\{9-\beta(4\alpha+\beta)\},$$

$k_\pm = \frac{\alpha+\beta}{(9+\beta^2-2\alpha\beta)}\cdot\frac{h_\pm}{1-\lambda_\pm}$（複合同順）とおく。 $|\delta_1|<1$ および $\delta_1=0$ のとき δ_0 と β は同符号であることに留意する。

<u>命題2.</u> $\beta(2\alpha-\beta)>0$ のとき，平均 μ_n は n の1次式 $\delta_1 n-\delta_0$ と等比数列の1次結合で書かれる項との和で表される。

§3.　S_nの分散σ_n^2

$\sigma_n^2 = E\left(S_n^2\right) - \mu_n^2$の漸化式を導くことから始める。

$S_{n+1}^2 = S_n^2 + 1 + 2S_n\left\{1_{A_n}X_{n+1} + (1-1_{A_n})X'_{n+1}\right\}$の期待値をとれば，

$E(1_{A_n}S_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3kP(S_n = 3k) = \mu_n(0)$として，

$$\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 = 1 + 2\left\{-\alpha\mu_n(0) + \beta(\mu_n - \mu_n(0)\right\} - \mu_{n+1}^2 + \mu_n^2$$
$$= 1 - \left(\beta - (\alpha+\beta)p_n\right)^2 + 2(\alpha+\beta)\left(p_n\mu_n - \mu_n(0)\right)$$

と書ける。ここで，$\mu_n(\pm 1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(3k\pm 1)P(S_n = 3k\pm 1)$（複合同順）を導入すれば，§2と同種の行列を用いて次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \mu_{n+1}(0) \\ \mu_{n+1}(1) \\ \mu_{n+1}(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & 1+\beta \\ 1-\alpha & 0 & 1-\beta \\ 1+\alpha & 1+\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_n(0) \\ \mu_n(1) \\ \mu_n(-1) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -(1-\beta) & 1+\beta \\ 1-\alpha & 0 & -(1-\beta) \\ -(1+\alpha) & 1+\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

さて，$\mu_n(i)\ (i = 0, \pm 1)$は$\mu_n = \mu_n(0) + \mu_n(1) + \mu_n(-1)$を$p_n, q_n, r_n$の比率に従って分配されるものと予想し，$p_n\mu_n - \mu_n(0) = x_n$，$q_n\mu_n - \mu_n(1) = y_n$，$r_n\mu_n - \mu_n(-1) = z_n$

$(x_n + y_n + z_n = 0)$を導入して，x_n, y_n, z_nがいずれも収束することを示す。z_n，r_nを消去して，計算すると次式に行き着く。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -(1-\beta^2) - (1+\beta)(\alpha+\beta)p_n \\ 1-\beta^2 - (1-\beta)(\alpha+\beta)p_n \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1-\beta^2 + (1+\beta)(\alpha+\beta)p_n & 2(1-\beta^2 + \beta(\alpha+\beta)p_n) \\ -(1-\beta)(2-\alpha+\beta) + (\alpha^2-\beta^2)p_n & -(1-\beta^2) + (1-\beta)(\alpha+\beta)p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}\right\}$$

この漸化式において，x_n，y_nの極限値の存在を仮定して，$n \to \infty$とすると

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}A\right\}\begin{pmatrix} x_\infty \\ y_\infty \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} -(1-\beta^2) - (1+\beta)(\alpha+\beta)p_\infty \\ 1-\beta^2 - (1-\beta)(\alpha+\beta)p_\infty \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 1-\beta^2 + (1+\beta)(\alpha+\beta)p_\infty & 2(1-\beta^2 + \beta(\alpha+\beta)p_\infty) \\ -(1-\beta)(2-\alpha+\beta) + (\alpha^2-\beta^2)p_\infty & -(1-\beta^2) + (1-\beta)(\alpha+\beta)p_\infty \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_\infty \\ q_\infty \end{pmatrix}\right\}$$

を得て，x_∞とy_∞が確定する。δ_n^2の主要項にはx_∞のみ現れるので，y_∞をα, βの複雑な式で書くことは省き，x_∞の計算結果を記すにとどめる。

$$x_\infty = \frac{-1}{9+\beta^2-2\alpha\beta}\left\{(3+\beta)(1-\beta^2) - \left(3-3\beta-2\beta^2-\alpha(3-\beta)\right)(1+\beta)p_\infty - 6(1-\beta^2)q_\infty\right\}$$
$$+ \frac{(\alpha+\beta)p_\infty}{9+\beta^2-2\alpha\beta}\left\{(3+2\beta+\beta^2-2\alpha\beta)p_\infty + 4\beta q_\infty\right\}$$
$$= \frac{-(\alpha+\beta)}{(9+\beta^2-2\alpha\beta)^2}\left\{(1+\beta)(15-9\beta+\beta^2+\beta^3) - \frac{3+\beta^2}{9+\beta^2-2\alpha\beta}\left(24(1+\beta) - (5+2\beta+\beta^2)(3-\beta^2+2\alpha\beta)\right)\right\}$$

次に$s_n = x_n - x_\infty$，$t_n = y_n - y_\infty$とおいて，s_n，t_nがともに0に収束することをみる。前節で出て来た固有値$\lambda_\pm, u_n = p_n - p_\infty$と$v_n = q_n - q_\infty$を用いれば，

$$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} A \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} + \{\alpha, \beta \text{を係数にもつ} u_n, v_n, u_n^2 \text{と} u_n v_n \text{の1次結合}\}$$

と書けるので，$U^{-1}\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} + \{\alpha, \beta \text{を係数にもつ} u_n, v_n, u_n^2 \text{と} u_n v_n \text{の1次結合}\}$

となる。$U^{-1}\begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix}$にこの漸化式を繰り返し適用して行けば，次式に至る。

$$U^{-1}\begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} -x_\infty \\ -y_\infty \end{pmatrix} + \{\lambda_+^n, \lambda_-^n, \lambda_+^{2n}, \lambda_-^{2n} \text{と} (\lambda_+\lambda_-)^n \text{の1次結合で表される} n \text{項の和}\}$$

こうして，s_n, t_nはともに$O\left(n|\lambda_+|^n\right)$となって，0に収束する。

$$\sigma_{n+1}^2 - \sigma_n^2 = \left\{1 - \left(\beta - (\alpha+\beta)p_\infty\right)^2 + 2(\alpha+\beta)x_\infty\right\} + \{u_n \text{と} s_n \text{で書かれる式}\}$$

と2つの項に分離すれば，$\sigma_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\gamma + \{u_n \text{と} s_n \text{で書かれる式}\}\right)$

$= \gamma n + O(1), \gamma = 1 - \delta_1^2 + 2(\alpha+\beta)x_\infty$が導かれる。

<u>命題3.</u> $\beta(2\alpha - \beta) > 0$のとき，$|\sigma_n^2 - \gamma n|$は有界である。

命題2,3から，1ゲーム当たりの利得S_n / nの分散は$n \to \infty$のとき0に収束することがわかる。チェビシェフの不等式により次の結果を得る。

<u>定理4.</u> $\beta(2\alpha - \beta) > 0$のとき，$S_n / n$は$n \to \infty$のとき$\delta_1$に弱収束する。

（註2） $\beta(2\alpha - \beta) \le 0$の場合にも，$\delta_1$と$\gamma$の式が成立し，同様のアプローチで定理4が証明される。

§4.　パラドックスを生成するパラメータ空間の凸領域

パロンドのゲームの有利さを示すのは，定理4により$\delta_1 > 0$のときである。つまり，パラメータ空間$\{(\beta,\alpha); -1 < \alpha, \beta < 1\}$の中で不等式$\alpha < 2\beta/(1+\beta^2)$で表される領域$\Gamma$に対応する。境界線$C$の方程式$\alpha = 2\beta/(1+\beta^2)$は，$\beta$の単調増加な奇関数であり，$0 \le \beta < 1$のとき上に凸となる。従って，$\Gamma_+ = \Gamma \cap \{0 \le \beta < 1\}$が凸領域をなすことに留意する。

さて，パラメータ(β_1,α_1)と(β_2,α_2)をもつゲームⅠとⅡ，2つのゲームを用意し，コインを投げて表が出ればⅠ，裏が出ればⅡを行う混合戦略を考える。ゲームをn回繰り返した時点における次のゲームの利得は，$1_{A_n} X_{n+1} + (1-1_{A_n})X'_{n+1}$の形をとり，期待値はそれぞれ$E(X_{n+1}) = -\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = -\bar{\alpha}$，$E(X'_{n+1}) = \dfrac{\beta_1+\beta_2}{2} = \bar{\beta}$となる。つまり，ゲームⅠ，Ⅱの混合戦略は$(\beta_1,\alpha_1)$と$(\beta_2,\alpha_2)$の中点に対応するパロンドのゲームと同値になることがわかる。

こうしてΓ_+の凸性を利用すれば，次の手順でパロンドが1997年に見出したパラドックスを生成することができる。初めに，$\beta_1,\ \beta_2 (0 \le \beta_1 < \beta_2 < 1)$を任意に選んで，$C$上の2点$\left(\beta_i, 2\beta_i/(1+\beta_i^2)\right)(i=1,2)$を対応させると，2点の中点$\left(\bar{\beta},\ 2\bar{\beta}(1+\beta_1\beta_2)/(1+\beta_1^2)(1+\beta_2^2)\right)$は$\Gamma_+$の内点になっている。次に$C$上の2点を(0, 1)方向に上に少しあげる。つまり，

$$0 < e_i < (1-\beta_i)^2/(1+\beta_i^2),\ \bar{e} = \frac{e_1+e_2}{2} < 2\bar{\beta}\left\{\frac{1}{1+(\bar{\beta})^2} - \frac{1+\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1^2)(1+\beta_2^2)}\right\}$$

を同時に満たすe_1, e_2を選んで，$\left(\beta_i, 2\beta_i/(1+\beta_i^2)+e_i\right)$に対応するゲームⅠ，Ⅱに移行する。このとき，ⅠとⅡはいずれも不利なゲームであるが，$\left(\bar{\beta}, \dfrac{2\bar{\beta}(1+\beta_1\beta_2)}{(1+\beta_1^2)(1+\beta_2^2)} + \bar{e}\right)$に対応するⅠとⅡの混合戦略は有利なゲームとなる。なお，パラメータの変換$(\beta,\alpha) \to -(\beta,\alpha)$をとればゲームの有利，不利が反転して，単独では有利なゲームⅠとⅡを組み合わせて，不利なゲームを生成することが可能となる。

$e_1 = e_2 = e$かつ$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = t$のケース（[1]～[3]参照）をより詳しく調べよう。(0, 1)方向に上にあげる共通量eは，限界値$\phi(t) = \mathrm{Min}\left(\dfrac{(1-t)^2}{1+t^2}, \dfrac{3t^3}{(4+t^2)(1+t^2)}\right)$をもつ。$t$の減少関数$\dfrac{(1-t)^2}{1+t^2}$と増加関数$\dfrac{3t^3}{(4+t^2)(1+t^2)}$は一点$\left(t_0, \dfrac{(1-t_0)^2}{1+t_0^2}\right)$で交差するので，$0 < t < t_0$のとき$\phi(t) = \dfrac{3t^3}{(4+t^2)(1+t^2)}, t_0 < t < 1$のとき$\phi(t) = \dfrac{(1-t)^2}{1+t^2}$となる。そして$t_0 \fallingdotseq 0.60757$および$\phi(t)$の最大値$\phi(t_0) \fallingdotseq 0.11248$を得る。

文献[1]～[3]で論じられているのは，ゲームⅠが単純なランダムウォーク$(\alpha = -\beta)$の場合であり，予め$t = 0.5,\ e = 0.01$と設定されているけれども，(−1，1)方向にeだけ上にあげる移行である。すなわち，$(-e,\ e)$と$\left(t-e,\ 2t/(1+t^2)+e\right)$に対応するゲームⅠとⅡはいずれも不利になるが，その中点は有利なゲームに対応するようなeの許容範囲$0 < e < \psi(t)$を導くのがわれわれの仕事である。有利さ

を示す不等式$\dfrac{1}{1+t^2}+e<\dfrac{t-2e}{1+(t/2-e)^2}$から3次不等式$(1+t^2)e^3-t^3e^2+(t^4+9t^2+12)e/4-3t^3/4<0$を得る。$t$の各値に対し，$e$の3次方程式の解$e_0(t)$ $\left(0<e_0(t)<t\right)$を求めれば，$\psi(t)=\mathrm{Min}\left(\dfrac{(1-t)^2}{1+t^2},e_0(t)\right)$となる。$\phi(t)$と同様に，$t_1(0.69759<t_1<0.69760)$が存在して，$0<t<t_1$なら$\psi(t)=e_0(t)$，$t_1<t<1$なら$\psi(t)=\dfrac{(1-t)^2}{1+t^2}$となる。最大値は$\psi(t_1)\fallingdotseq 0.06151$である。

$t=0.4$，0.5，0.6，0.7のとき，$\phi(t)$と$\psi(t)$の近似値を最後に列挙する。

$\phi(0.4)\fallingdotseq 0.03979>\psi(0.4)\fallingdotseq 0.01426$

$\phi(0.5)\fallingdotseq 0.07059>\psi(0.5)\fallingdotseq 0.02622$

$\phi(0.6)\fallingdotseq 0.10928>\psi(0.6)\fallingdotseq 0.04223$

$\phi(0.7)=\psi(0.7)\fallingdotseq 0.06040$

（註3） パロンドのゲームにおいて，$S_n=3k$の値からは3つの値$3(k+i)\ (i=-1,0,1)$のどれかに推移する。それに要するゲーム回数をNと書くと，

$$P\left(N=2m+1,\ S_{n+N}=3(k\pm 1)\right)=\frac{1\pm\alpha}{2}\left(\frac{1\pm\beta}{2}\right)^2\left(\frac{1-\beta^2}{4}\right)^{m-1}$$（複号同順），

$$P\left(N=2m,\ S_{n+N}=3k\right)=\frac{1+\alpha\beta}{2}\left(\frac{1-\beta^2}{4}\right)^{m-1}$$，$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$を得る。従ってS_nの値が$3k$から$3(k+i)$に推移する確率Q_iは，上式のmに関する和を計算して，

$Q_{\pm 1}=\dfrac{(1\mp\alpha)(1\pm\beta)^2}{2(3+\beta^2)}$，$Q_0=\dfrac{2(1+\alpha\beta)}{3+\beta^2}$となる。加えて，条件つき期待値

$E\left(N\middle|S_{n+N}=3(k+i)\right)=|i|+8/(3+\beta^2)$を求めることができる。

$Q_1-Q_{-1}=\dfrac{2\beta-\alpha(1+\beta^2)}{3+\beta^2}=\left(1-\dfrac{2\beta(\alpha+\beta)}{3(3+\beta^2)}\right)\delta_1$となるので，ゲームの有利，不利は$Q_1-Q_{-1}$の符号によっても判定される。

文献[4]第14章の一般化されたランダムウォークの理論を応用すれば，所持金$3a$をもつプレーヤー（胴元の所持金は$3b$）がパロンドのゲームを繰り返し行う際に生じる破産問題を解明することが可能となる。S_nの平均と分散に基づく定理4とは違って，サンプルパスの挙動を調べることによって，ゲームの理解を一層深めることができるが，与えられた紙数を越えるので，詳細に立ち入ることはしない。著者が大学4年のとき，読み始めたフェラーのすぐれた著書で展開される理論の数々。パロンドのパラドックスを通してその一つを再訪できたことに，格別の感慨を覚えることを付記したい。

謝辞

平成25年度を最後の在職年度とする著者にとって，担当する授業の場で熱心に勉強し，質問や討論にも積極的に参加してくれた医学生たちは，常に得難い存在であった。まず彼らに感謝の念を記したい。

次に，資料の整理から原稿完成まで著者を助けるとともに，長年にわたって数学教室の運営に貢献して下さいました鴨藤江利子さんに，心から御礼を申しあげます。

参考文献

[1] エハルト・ベーレンツ：続 5 分でたのしむ数学．岩波書店, 2008.

[2] クリスティアン・ヘッセ：なぜ数学は人を幸せな気持ちにさせるのか．ディスカバー・トゥエンティワン，2012.

[3] J.A.Paulos:A Mathematician Plays the Stock Market. New York: Basic Books, 2003.

[4] W.Feller:An Introduction to Probability Theory and It's Applications (3rd edition),Vol. I . New York: John Wiley & Sons, Inc., 1968.